
Contrôle Continu du 23 février 2023, Version 2

Durée : 30 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

Question du cours (2 pts) Compléter la phrase suivante (I est un intervalle) :*Une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite contractante s'il ...***Exercice 1** (8 pts) Soit $a > 0$. Considerons la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 > \sqrt{a}$ où

$$f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right).$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est convergente et déterminer sa limite.*Indication : Il existe plusieurs façons de le faire. Dans tous les cas, vous êtes autorisé à utiliser les résultats du cours.***Exercice 2** (10 pts) Définissons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x & \text{si } x \geq 0, \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- (1 point) La fonction f est-elle continue ?
- (3 points) La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
- (4 points) La fonction f est-elle deux fois dérivable ? Si oui, sa deuxième dérivée est-elle continue ?
- (2 points) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}.$$