

Contrôle Continu du 23 février 2023, Version 1

Durée : 30 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées, sauf indication contraire.

Question du cours (2 pts) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f \in C^1(\mathbb{R}^*)$.

Lesquelles des affirmations suivantes sont correctes ? Répondre uniquement par **oui** ou **non**, sans preuve. (3 réponses correctes : 2 points / 2 réponses correctes : 1 point / sinon : 0 point).

- a. $f \in C^1(\mathbb{R})$ si et seulement si f est dérivable en 0.
- b. $f \in C^1(\mathbb{R})$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$ existent et elles sont égales.
- c. $f \in C^1(\mathbb{R})$ si et seulement si f est continue en 0.

Exercice 1 (8 pts) Définissons $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0, \\ x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- a. (1 point) La fonction f est-elle continue ?
- b. (2.5 points) La fonction f est-elle dérivable ? Si oui, sa dérivée est-elle continue ?
- c. (2.5 points) La fonction f est-elle deux fois dérivable ? Si oui, sa deuxième dérivée est-elle continue ?
- d. (2 points) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}.$$

Exercice 2 (10 pts) Considerons la suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = \frac{\pi}{2}$ où

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2} \arctan x.$$

- a. (1 point) f a un point fixe $l \in \mathbb{R}$ évident, lequel ?
- b. (2 points) Montrer que f n'a pas d'autres points fixes. (Pour cela il suffit de montrer que la fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - f(x)$ est strictement croissante. Pourquoi cela suffit ?)
- c. (7 points) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
Indication : Il existe plusieurs façons de le faire. Dans tous les cas, vous êtes autorisé à utiliser les résultats du cours.