Examen final d'Algèbre 2
Corrigé

Exercice 1 :

1) On applique à P la méthode du Pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -4L_2 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 16 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & -12 & -15 & -6 & 0 & 3 \end{array}\right) \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 16 & 8 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{4} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 12 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 15 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 12 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right) \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

Donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

2) Le calcul donne $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Comme D est une matrice diagonale on a $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}$, notons H_n la propriété « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».

<u>Initialisation</u> : Comme $D = P^{-1}AP$ on a $PDP^{-1} = \underbrace{PP^{-1}}_{=I_3} A \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} = A$ donc H_1 est vraie.

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Suposons H_n vraie et montrons qu'alors H_{n+1} est vraie.

Si $A^n = PD^nP^{-1}$ alors $A^{n+1} = A^n . A = PD^n \underbrace{P^{-1}P}_{=I_3} DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

donc H_{n+1} est vraie.

<u>Conclusion</u> : par le principe de récurrence, $A^n = PD^nD^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5) Le calcul donne

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2^n & -12+2^{n+1} & 9-2^n \\ 4-2^{n+1} & -8+2^{n+2} & 6-2^{n+1} \\ 2-2^{n+1} & -4+2^{n+2} & 3-2^{n+1} \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 2 :</u>

1) $$A = \mathrm{Mat}_\mathcal{E}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

2) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f) \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2x - 4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x,y,z) = -z(2,0,-1) \iff (x,y,z) \in \mathrm{vect}((2,0,-1))$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}((2,0,-1))$. Comme $(2,0,-1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ la famille $((2,0,-1))$ est libre et engendre $\mathrm{Ker}(f)$. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3) f n'est pas injective puisque $\ker(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

4) Par le théorème du rang on a $\dim \ker(f) + rg(f) = \dim \mathbb{R}^3$ donc

$rg(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker(f) = 3 - 1 = 2$.

5) On a $\dim \mathrm{Im}(f) = rg(f) = 2$ donc $\mathrm{Im}(f) \subsetneq \mathbb{R}^3$ donc f n'est pas surjective.

6) On sait que $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2. Il nous suffit donc de trouver deux vecteurs de $\mathrm{Im}(f)$ formant une famille libre pour obtenir une base.

Montrons que $f(e_1) = -2e_1 + 2e_3 = (-2,0,2)$ et $f(e_2) = 3e_2 = (0,3,0)$ forment une famille libre. Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a:

$$\lambda(-2,0,2) + \mu(0,3,0) = (0,0,0) \Rightarrow (-2\lambda, 3\mu, 2\lambda) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Donc $((-2,0,2),(0,3,0))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

7) a) et b) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in G &\Leftrightarrow x - 2y + z = 0\\ &\Leftrightarrow x = 2y - z\\ &\Leftrightarrow (x,y,z) = (2y-z, y, z) = y(2,1,0) + z(-1,0,1)\\ &\Leftrightarrow (x,y,z) \in \mathrm{vect}((2,1,0),(-1,0,1))\end{aligned}$$

Donc $G = \mathrm{vect}((2,1,0),(-1,0,1))$ donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda(2,1,0) + \mu(-1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (2\lambda - \mu, \lambda, \mu) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

Donc la famille $((2,1,0),(-1,0,1))$ est libre et engendre G. C'est donc une base de G.

En particulier $\dim G = 2$.

c) Montrons que $\mathrm{Ker}(f)$ et G sont en somme directe.

Soit $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap G$.

Comme $u \in \mathrm{Ker}(f)$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $u = \alpha(2,0,-1) = (2\alpha, 0, -\alpha)$.

Comme $u \in G$ on a $2\alpha - 2\times 0 + (-\alpha) = 0$ donc $\alpha = 0$ donc $u = (0,0,0)$.

Donc $\mathrm{Ker}(f) \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Comme $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim G = 1 + 2 = \dim \mathbb{R}^3$

$\mathrm{Ker}(f)$ et G sont bien supplémentaires.

8) a) Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = (0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha(2,0,-1) + \beta(1,0,-1) + \gamma(0,1,0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (2\alpha + \beta, \gamma, -\alpha - \beta) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

Donc (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ à trois éléments.

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) On a $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ donc $f(v_2) = (2,0,-2) = 2v_2$

$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(v_3) = (0,3,0) = 3v_3$

c) Comme $f(v_1) = 0_{\mathbb{R}^3}$, $f(v_2) = 2v_2$ et $f(v_3) = 3v_3$ on a :

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(v_1) & f(v_2) & f(v_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}$$

Exercice 3 :

1) Soit P, Q deux polynômes dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P + Q)(X) &= X(\alpha P + Q)'(X) - (\alpha P + Q)(X+1) \\ &= X\left(\alpha P'(X) + Q'(X)\right) - \left(\alpha P(X+1) + Q(X+1)\right) \\ &= \alpha\left(X P'(X) - P(X+1)\right) + XQ'(X) - Q(X+1) \\ &= \alpha \varphi(P)(X) + \varphi(Q)(X)\end{aligned}$$

Donc φ est linéaire

2) On a $\varphi(1) = X \times 0 - 1 = -1$

$$\varphi(X) = X \times 1 - (X+1) = -1$$

$$\varphi(X^2) = X(2X) - (X+1)^2 = 2X^2 - X^2 - 2X - 1 = X^2 - 2X - 1$$

Donc
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\varphi) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array} \end{array}$$

3) Soit $P(X) = a + bX + cX^2 \in \mathbb{R}_2[X]$.

$$P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - b - c = 0 \\ -2c = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{P(X) = a(1 - X),\ a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{vect}(1 - X)$.

Comme $1 - X \neq 0_{\mathbb{R}_2[X]}$, $(1 - X)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ qui est donc de dimension 1.

4) Par le théorème du rang :

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \dim \mathbb{R}_2[X] - \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 3 - 1 = 2$$

5) Comme $\dim \operatorname{Im} \varphi = 2$, il suffit de trouver deux polynômes de $\operatorname{Im}(\varphi)$ qui forment une famille libre pour obtenir une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$. Vérifions que $\varphi(1) = -1$ et $\varphi(X^2) = X^2 - 2X - 1$ forment une famille libre. Soit λ et $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(-1) + \mu(X^2 - 2X + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (-\lambda + \mu) - 2\mu X + \mu X^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda + \mu = 0 \\ \mu = \end{cases}$$ car la famille $(1, X, X^2)$ est libre

$$\Rightarrow \mu = \lambda = 0$$

Donc la famille $(-1, X^2 - 2X - 1)$ est une base de $\operatorname{Im}(\varphi)$.