Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info — UE : Algèbre 2

Corrigé du contrôle continu n° 4

Mardi 18 avril 2023 - Durée : 1 h 30

Question de cours.

1. Le noyau de u est $\ker u = \{x \in E : u(x) = 0_F\}$.
2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\lambda_1 u(e_1) + \cdots + \lambda_n u(e_n) = 0_F$. Comme u est linéaire, on en déduit que : $u(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n) = 0_F$, ainsi $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n \in \ker u$.

   Mais u est injective, d'où $\ker u = \{0_E\}$ et donc $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$.

   Or $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E, par conséquent, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

   Donc $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille libre de F.

Exercice 1. $\deg F < 0$ et $X^2 + 4$ est irréductible dans $\mathbf{R}[X]$, ainsi il existe $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tel que :

$$F(X) = \frac{a}{X-3} + \frac{bX + c}{X^2 + 4}.$$

En multipliant l'égalité précédente par $X - 3$, puis en évaluant en $X = 3$, on obtient :

$$a = \frac{4 \times 3^2 - 3 \times 3 - 1}{3^2 + 4} = \frac{26}{13} = 2.$$

On évalue ensuite en $X = 0$, alors : $-\frac{2}{3} + \frac{c}{4} = \frac{1}{12}$, d'où :

$$c = 4\left(\frac{1}{12} + \frac{2}{3}\right) = 3.$$

Enfin, on multiplie l'égalité par X puis on fait tendre X vers $+\infty$, il vient : $2 + b = 4$, d'où $b = 2$.
Finalement, on a :

$$F(X) = \frac{2}{X-3} + \frac{2X + 3}{X^2 + 4}.$$

Exercice 2.

1. Soit $(x_1, y_1, z_1) \in \mathbf{R}^3$, $(x_2, y_2, z_2) \in \mathbf{R}^3$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
f(\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) &= f(\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2) \\
&= (\lambda x_1 + x_2 + \lambda y_1 + y_2, \lambda x_1 + x_2 - 2(\lambda z_1 + z_2)) \\
&= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \lambda x_1 - 2(\lambda z_1)) + (x_2 + y_2, x_2 - 2z_2) \\
&= \lambda(x_1 + y_1, x_1 - 2z_1) + (x_2 + y_2, x_2 - 2z_2) \\
&= \lambda f(x_1, y_1, z_1) + f(x_2, y_2, z_2).
\end{aligned}$$

   Donc f est une application linéaire.

2. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$, alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff f(x,y,z) = (0,0) \iff \begin{cases} x + y & = 0 \\ x \quad - 2z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = -x \\ z & = \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

donc $\ker f = \mathrm{Vect}(e)$ où $e = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Or $e \neq 0_{\mathbf{R}^3}$, d'où (e) est une base de $\ker f$ et donc $\dim(\ker f) = 1$.

3. D'après la question précédente, $\ker f \neq \{0_{\mathbf{R}^3}\}$, donc f n'est pas injective.

4. D'après le théorème du rang, on a $\mathrm{rg}(f) + \dim(\ker f) = \dim \mathbf{R}^3 = 3$, ainsi $\mathrm{rg}(f) = 2$. De plus, $\mathrm{Im} f \subset \mathbf{R}^2$ et $\dim \mathbf{R}^2 = 2$, donc $\mathrm{Im} f = \mathbf{R}^2$, c'est-à-dire que f est surjective.

Exercice 3.

1. (a) • $0 + 2 \times 0 - 0 = 0$ d'où $(0,0,0) \in F$.
   • Soit $(x_1, y_1, z_1) \in F$, $(x_2, y_2, z_2) \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors :

$$\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (\lambda x_1 + x_2, \lambda y_1 + y_2, \lambda z_1 + z_2),$$

   de plus :

$$(\lambda x_1 + x_2) + 2(\lambda y_1 + y_2) - (\lambda z_1 + z_2) = \lambda(x_1 + 2y_1 - z_1) + (x_2 + 2y_2 - z_2) = 0,$$

   car $x_1 + 2y_1 - z_1 = 0$ et $x_2 + 2y_2 - z_2 = 0$. D'où, $\lambda(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) \in F$.
   Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

   (b) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$, alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \iff x + 2y - z = 0 \iff z = x + 2y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Posons $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on vient de montrer que $F = \mathrm{Vect}(u, v)$.
   Montrons que (u, v) est une famille libre : soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $au + bv = 0_{\mathbf{R}^3}$, alors :

$$\begin{cases} a & = 0 \\ \quad b & = 0 \\ a + 2b & = 0 \end{cases} \iff a = b = 0.$$

   Ainsi (u, v) est une famille libre, c'est donc une base de F.

(c) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$, alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G \iff x+y=0 \text{ et } y+z=0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Posons $e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors $G = \text{Vect}(e)$ et comme $e \neq 0_{\mathbf{R}^3}$, (e) est une base de G.

(d) D'après les questions précédentes, $\dim F = 2$ et $\dim G = 1$, d'où $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbf{R}^3$.
De plus : $-1 + 2 \times 1 - (-1) = 2$, d'où $e \notin F$ et donc $F \cap G = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$.
On en déduit que $\mathbf{R}^3 = F \oplus G$.

2. (a) Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$, alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f \iff \begin{cases} 3x + 2y - z &= 0 \\ -x \quad\quad + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\iff}} \begin{cases} 3x + 2y - z &= 0 \\ 2y + 2z &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 3x + 2y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} 0 &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y + z &= 0 \\ x + y &= 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G.$$

Donc $\ker f = G$.

(b) i. $\text{Im} f = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$, de plus :
— $f(e_1) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $\frac{3}{2} + 2(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = 0$ d'où $f(e_1) \in F$.
— $f(e_2) = (1, 0, 1)$ et $1 + 2 \times 0 - 1 = 0$ d'où $f(e_2) \in F$.
— $f(e_3) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $-\frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ d'où $f(e_3) \in F$.
Or F est un espace vectoriel, donc $\text{Im} f \subset F$.

ii. D'après les questions précédentes, on a $\dim F = 2$ et $\dim(\ker f) = \dim G = 1$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker f) + \text{rg}(f) = \dim \mathbf{R}^3 = 3$, d'où $\text{rg}(f) = 3 - 1 = 2$.
Comme $\text{Im} f \subset F$ et $\dim(\text{Im} f) = \dim F = 2$, on a $\text{Im} f = F$.

(c) i. On a :

$$f \circ f(e_1) = f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f(e_1)$$
$$f \circ f(e_2) = f(1, 0, 1) = (1, 0, 1) = f(e_2)$$
$$f \circ f(e_3) = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f(e_3)$$

ii. $f \circ f$ et f sont deux applications linéaires et, d'après la question précédente, elles coïncident sur une base de $\mathbf{R}^3$, par conséquent, $f \circ f = f$.