Université Claude Bernard - Lyon 1 | Semestre de printemps 2022-2023

Algèbre II | Durée : 1h30

Contrôle continu 2

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction; **toute réponse insuffisamment justifée sera considérée comme nulle.** *Les exercices sont indépendants. Les informations sur le barême question par question sont* **indicatives**.

Questions de cours (2 points)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de n éléments de E. Écrire la définition de : « $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille libre ».
2. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 1. (2 points) Soit m un réel. On note $\mathcal{B}_m$ la famille de deux vecteurs du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ définie comme :

$$\mathcal{B}_m = ((3m + 4, 2), (m, 1)).$$

Pour quelles valeurs de m la famille $\mathcal{B}_m$ est-elle libre ? Pour quelles valeurs de m est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2. (4 points) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les quatre vecteurs :

$$a = (3, 1, 4) \qquad b = (1, 5, -2) \qquad c = (4, 2, 1) \qquad d = (0, -2, 1).$$

1. Le vecteur c appartient-il au sous-espace $\mathrm{Vect}(a, b)$?
2. La famille (a, b, d) est-elle libre ?
3. Le vecteur c appartient-il au sous-espace $\mathrm{Vect}(a, b, d)$?

Exercice 3. (8 points) Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère les sous-ensembles suivants :

$$F = \{(\alpha, \beta, -\alpha) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}, \quad H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 1\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que H n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Fournir une base de F et préciser la dimension de F.
5. Fournir une base de G et préciser la dimension de G.
6. Écrire une représentation de F sous forme d'une ou plusieurs équations cartésiennes vérifiées par ses éléments et eux seuls.
7. Fournir une base de $F \cap G$.

Exercice 4. (4 points) Dans cet exercice, E désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel également noté $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
On notera F l'ensemble des fonctions deux fois dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et telles que $f'' = 4f$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. (a) Soit G l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que $f(1) = 0$. Est-ce que G est un sous-espace vectoriel de E ?

   (b) En utilisant le a), montrer que l'ensemble H des applications f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont deux fois dérivables, qui vérifient la relation $f'' = 4f$ et qui vérifient l'identité $f(1) = 0$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Dans cette question, pour chaque c réel, on note g_c l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie pour tout réel t par $g_c(t) = e^{ct}$.

   (a) Vérifier que g_2 et g_{-2} sont éléments de F.

   (b) Montrer que (g_2, g_{-2}) est une famille libre. Que peut-on en conclure concernant la dimension de F ?