Exercice 1 Pour $m \in \mathbb{R}$ notons e_m et f_m les deux vecteurs composant $\mathcal{B}_m$.

Vu sa deuxième composante, $f_m \neq (0,0)$ et donc

$\mathcal{B}_m$ est liée $\iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \,/\, e_m = \alpha f_m \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \begin{cases} 3m+4 = \alpha m \\ 2 = \alpha \end{cases} \iff 3m+4 = 2m \iff m = -4$

Comme $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ et que $\mathcal{B}_m$ est formée de deux vecteurs,

$\mathcal{B}_m$ est une base de $\mathbb{R}^2 \iff \mathcal{B}_m$ est libre $\iff m \neq -4$

Exercice 2

1) $c \in \mathrm{Vect}(a,b) \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \begin{cases} 3\alpha + \beta = 4 \\ \alpha + 5\beta = 2 \\ 4\alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \begin{cases} 3\alpha + \beta = 4 & \\ -14\alpha = -18 & L_2 - 5L_1 \\ 10\alpha = 9 & L_3 + 2L_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \exists \alpha \in \mathbb{R} \begin{cases} -14\alpha = -18 \\ 10\alpha = 9 \end{cases} \iff \exists \alpha \in \mathbb{R} \begin{cases} -140\alpha = -180 \\ 140\alpha = 126 \end{cases} \Rightarrow 126 = 180$

Donc $c \notin \mathrm{Vect}(a,b)$

2) Soit $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$. Supposons $\alpha a + \beta b + \delta d = 0 \iff \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 5\beta - 2\delta = 0 \\ 4\alpha - 2\beta + \delta = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 & \\ -14\alpha - 2\delta = 0 & L_2 - 5L_1 \\ 10\alpha + \delta = 0 & L_3 + 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ 6\alpha = 0 \\ 10\alpha + \delta = 0 \end{cases} \quad L_2 + 2L_3 \quad \Rightarrow \alpha = \delta = \beta = 0$

(a,b,d) est donc libre

3) (a,b,d) est composée de trois vecteurs, est libre, et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

(a,b,d) engendre donc $\mathbb{R}^3$. En particulier $c \in \mathrm{Vect}(a,b,d) = \mathbb{R}^3$.

Exercice 3

1) Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\in F \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ (x,y,z)=(\alpha,\beta,-\alpha)$
$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ (x,y,z)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,0) \Leftrightarrow (x,y,z)\in \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$
Donc $F=\mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,0))$ donc c'est un sous-espace.

2) Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\in G \Leftrightarrow x+2y-z=0$

$$\Leftrightarrow \exists \beta,\gamma \left|\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ y=\beta \\ z=\gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists\beta,\gamma \left\{\begin{array}{l} x+2\beta-\gamma=0 \\ y=\beta \\ z=\gamma \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \exists\beta,\gamma \,/\, (x,y,z)=(-2\beta+\gamma,\beta,\gamma) \Leftrightarrow \exists\beta,\gamma\in\mathbb{R} \,/\, (x,y,z)=\beta(-2,1,0)+\gamma(1,0,1)$
$\Leftrightarrow (x,y,z)\in\mathrm{Vect}((-2,1,0),(1,0,1))$
Donc $G=\mathrm{Vect}((-2,1,0),(1,0,1))$ donc c'est un sous-espace

3) Si on s'intéresse à $(0,0,0)$ on constate que $0+2\times0-0=0\neq1$
donc $(0,0,0)\notin H$, qui n'est donc pas un sous-espace

4) La méthode du 1 a fourni une ~~page~~ famille génératrice de F. Les deux vecteurs qui y figurent ne sont pas proportionnels : elle est donc libre. C'est donc une base de F, qui est donc de dimension 2.

5) Idem en remplaçant "1" par "2" et "F" par "G".

6) Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\in F \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R}\ (x,y,z)=(\alpha,\beta,-\alpha)$

$$\Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R} \left\{\begin{array}{l} \alpha=x \\ \beta=y \\ -\alpha=z \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists\alpha,\beta\in\mathbb{R} \left\{\begin{array}{ll} \alpha=x & \\ \beta=y & \\ 0=+x+z & L_3+L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x+z=0$$

7) Pour $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\in F\cap G \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R} \left\{\begin{array}{l} x+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ z=-\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R} \left\{\begin{array}{ll} x=\alpha & L_1-L_3 \\ x+2y=-\alpha & L_2+L_3 \\ z=-\alpha & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R} \left\{\begin{array}{ll} x=\alpha & \\ 2y=-2\alpha & L_2-L_1 \\ z=-\alpha & \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists\alpha\in\mathbb{R}\ (x,y,z)=\alpha(1,-1,-1)$$

On constate que $F\cap G=\mathrm{Vect}(1,-1,-1)$. Ce vecteur n'étant pas nul, $((1,-1,-1))$ est libre, donc est une base de $F\cap G$

Exercice 4

1) * La fonction nulle 0 est deux fois dérivable et $0'' = 0 = 4 \times 0$
Elle est donc dans F
* Soit $f, g \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f + \lambda g$ est alors deux fois dérivable avec $(f+\lambda g)'' = f'' + \lambda g'' = 4f + \lambda(4g) = 4(f+\lambda g)$
elle est donc dans F.

Ceci prouve que F est un sous-espace

2) (a) * La fonction nulle vérifie $0(1) = 0$, donc est dans G
* Soit $f, g \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On constate que
$$(f+\lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1) = 0 + 0\lambda = 0 \text{ donc } f+\lambda g \in G$$
Ceci prouve que G est un sous-espace

(b) On remarque que $H = F \cap G$: c'est donc l'intersection de deux sous-espaces, donc un sous-espace

3) (a) g_2 et g_{-2} sont deux fois dérivables. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on calcule
$g_2'(t) = 2e^{2t}$ puis $g_2''(t) = 4e^{2t}$ et $g_{-2}'(t) = -2e^{-2t}$ puis $g_{-2}''(t) = 4e^{-2t}$
On constate que $g_2'' = 4g_2$ et $g_{-2}'' = 4g_{-2}$: les deux sont dans F

(b) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, supposons $\alpha g_2 + \beta g_{-2} = 0$ donc
pour tout $t \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t} = 0 \quad (*)$

En multipliant $(*)$ par e^{2t} $\qquad \alpha e^{4t} + \beta = 0$
puis en dérivant $\qquad 4\alpha e^{4t} = 0$
enfin en évaluant en 0 $\qquad 4\alpha = 0$ donc $\alpha = 0$
De même avec e^{-2t} $\qquad \alpha + \beta e^{-4t} = 0$
puis $\qquad -4\beta e^{-4t} = 0$
et enfin $\qquad -4\beta = 0$ donc $\beta = 0$

(g_2, g_{-2}) est donc libre.

Le sous-espace F contient une famille libre de deux vecteurs. On conclut que, s'il est de dimension finie, celle-ci est supérieure ou égale à 2.