Feuille d'exercices n° 4

Applications linéaires

Exercice 1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (0, 2y)$;
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 3, y)$;
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y^2, x - y)$;
4. $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + z, y + z)$;
5. $f_5 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto x + y + z$;
6. $f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto (x, 2x, -3x)$.

Exercice 2. Considérons l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, par :

$$f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z).$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner une base de $\ker(f)$. En déduire le rang de f.
3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On considère l'homothétie de $\mathbb{R}^2$ de rapport α, c'est-à-dire l'application $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \alpha(x, y)$.

1. Montrer que h est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(h)$.
3. Montrer que h est surjective.

Exercice 4. Soit $\theta \in [0, 2\pi]$. On considère la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire l'application :

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta).$$

1. Montrer que R_θ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que R_θ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1 + x_2, x_3 + x_4)$. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

1. Calculer l'image par f des vecteurs de la base canonique. En déduire le rang de f.
2. Déterminer la dimension de $\ker(f)$ et en donner une base.

Exercice 6. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y, x + y)$.

1. Déterminer le noyau de f, puis l'image de f.
2. f est-elle injective ?
3. f est-elle surjective ?

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n et $\varphi \colon E \to \mathbb{R}$ une application linéaire non nulle.

1. (a) Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) = 1$.
   (b) En déduire que φ est surjective.
2. Quelle est la dimension de $\ker(\varphi)$?

Exercice 8. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère l'application linéaire $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$.

1. Déterminer un vecteur $a \in \mathbb{R}^3$, non nul, tel que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(a)$.
2. On pose $b = e_1 + e_2$ et $c = e_2 - e_3$.
   (a) Calculer $f(b)$ et $f(c)$.
   (b) En déduire que (b, c) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant $\mathrm{Im}(f)$.
4. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$?

Exercice 9. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(e_1) = e_2$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que $f^3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ ($f^3 = f \circ f \circ f$).
3. Démontrer que $F = \{u \in \mathbb{R}^3 : f(u) = u\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

Exercice 10. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
On considère l'application $u \colon \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $P \longmapsto P + (1 - X)P'$.

1. Montrer que u est bien définie puis que c'est une application linéaire.
2. Déterminer $\ker(u)$.
3. Quel est le rang de u ?
4. Donner une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$, E un espace vectoriel de dimension n et $u \colon E \to E$ un endomorphisme.
Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)$;

(ii) Pour tout $x \in E$, $u^2(x) = 0$ et $n = 2\,\mathrm{rg}(u)$.

Remarque : $u^2 = u \circ u$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$ et E un espace vectoriel de dimension n. On appelle projecteur de E toute application linéaire $p\colon E \to E$ telle que $p^2 = p$. Soit p un projecteur de E.

1. Montrer que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires.
2. Montrer que $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur.
3. Montrer que $\ker(\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Im}(p)$.
4. On considère $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \longmapsto \left(\frac{y}{2}, y\right)$.
    (a) Montrer que f est un projecteur.
    (b) Déterminer l'image de f.
    (c) Déterminer l'image de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} - f$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel, u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v, c'est-à-dire que $v(\ker(u)) \subset \ker(u)$ et $v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $u\colon E \to E$ un endomorphisme et $\lambda \in \mathbb{R}$.
On note $E_\lambda = \ker(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

1. Justifier que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Pour tout $x \in E_\lambda$, calculer $u(x)$ en fonction de λ et x.
3. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $u(F)$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Supposons que $\lambda \neq 0$, montrer que $u(E_\lambda) = E_\lambda$.

Exercice 15.
On note $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $F = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ celui des fonctions de classe C^1.
On considère l'application $\phi\colon E \to F$ définie par, pour tout $f \in E$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que ϕ est bien définie puis que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de ϕ.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\phi) = \{g \in F : g(0) = 0\}$.
4. On considère l'application linéaire $\psi\colon F \to E$, $f \longmapsto f'$.
   Calculer $\psi \circ \phi$ et $\phi \circ \psi$.