

**Feuille d'exercices n° 3**  
FRACTIONS RATIONNELLES

**Exercice 1.** Décomposer en éléments simples sur  $\mathbb{R}$  les fractions rationnelles suivantes :

- |   |   |
|---|---|
| <p>1. <math>\frac{1}{(X+1)(X-2)}</math> ;</p> <p>2. <math>\frac{X}{(X+1)(X-2)}</math> ;</p> <p>3. <math>\frac{X}{X^2-1}</math> ;</p> <p>4. <math>\frac{X+1}{X^2+1}</math> ;</p> | <p>5. <math>\frac{X^2}{X^3-1}</math> ;</p> <p>6. <math>\frac{X-1}{X^2(X^2+1)}</math> ;</p> <p>7. <math>\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2}</math> ;</p> <p>8. <math>\frac{X^4}{X^2-3X+2}</math>.</p> |
|---|---|

**Exercice 2.** Soit  $a, b$  et  $c$  trois réels distincts.

1. Montrer que la famille  $\left(\frac{1}{X-a}, \frac{1}{X-b}, \frac{1}{X-c}\right)$  est libre dans  $\mathbb{R}(X)$ .
2. La famille  $\left(\frac{1}{(X-a)^2}, \frac{1}{X-a}, \frac{1}{X-b}, \frac{1}{X-c}\right)$  est-elle libre dans  $\mathbb{R}(X)$  ?

**Exercice 3.** On considère  $f: \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ . On note  $\mathcal{C}$  le graphe de  $f$ .

1. Déterminer l'équation des asymptotes à  $\mathcal{C}$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
2. Étudier la position de  $\mathcal{C}$  par rapport à ses asymptotes au voisinage de  $+\infty$  et  $-\infty$ .

**Exercice 4.**

1. On pose, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$ .
  - (a) Pour tout  $n \geq 2$ , exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
  - (b) Étudier la convergence de la suite  $(S_n)_{n \geq 2}$ .
2. On pose, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ .
  - (a) Pour tout  $n \geq 2$ , exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$ .
  - (b) Étudier la convergence de la suite  $(S_n)_{n \geq 2}$ .