Feuille d'exercices n^o 2

Espaces vectoriels

Exercice 1. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 0\}$.
2. $E_2 = \{(\alpha, 2\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\}$.
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 7y = z\}$.
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - z^2 = 0\}$.
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$.
6. $E_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : zx + y = 0\}$.
7. $E_7 = (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \cup (\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-)$.
8. $E_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 - 12xy = 0\}$.

Exercice 2. On considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+2y-z = 0\}$ et $G = \{(a-b, a+b, a-3b) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 3. On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}[X]$, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) = 3\}$.
2. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq 3\}$.
3. $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] : \deg(P) \leq 2 \text{ et } P(1) = 0\}$.
4. $E_4 = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 1\}$.

Exercice 4. On considère $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les sous-ensembles suivants de E, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des applications continues.
2. L'ensemble des applications qui valent 0 en 0.
3. L'ensemble des applications qui valent 1 en 0.
4. L'ensemble des applications qui valent 0 en 1.
5. L'ensemble des applications de la forme $t \mapsto at$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Donner un exemple d'entier n et de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ dont la réunion n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. Montrer que, pour tous sous-espaces vectoriels F, G de E, $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si, $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Exercice 6. Les familles de $\mathbb{R}^2$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $(u, v) = ((2, -3), (-1, 1))$.
2. $(u, v) = ((-6, 2), (9, -3))$.
3. $(u, v) = ((m + 1, -1), (-3, m - 1))$ où $m \in \mathbb{R}$.

Exercice 7.

1. Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?
   (a) $(u, v) = ((1, 1, 1), (1, 1, -1))$.
   (b) $(u, v, w) = ((1, 0, -1), (-1, 1, 0), (0, -1, 1))$.
   (c) $(u, v, w, z) = ((1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (-1, 1, 1))$.
   (d) $(u, v, w) = ((1, 1, 1), (2, -1, 2), (1, -2, -1))$.
2. Les familles précédentes sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8. On considère les vecteurs $a = (2, 3, -1)$, $b = (1, -1, -2)$, $c = (3, 7, 0)$ et $d = (-5, 0, 7)$. On note $E = \mathrm{Vect}(a, b)$ et $F = \mathrm{Vect}(c, d)$ qui sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$.

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, -1, 2)$ et $w = (1, -2, 3)$.

1. La famille (u, v, w) est-elle libre ?
2. On note F le sous-espace vectoriel engendré par (u, v, w). Donner une base de F.
3. On considère $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + z = 0\}$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, puis que $F = G$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et (u, v, w) une famille libre de $\mathbb{R}^n$. On note

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = (\alpha + \beta)u + (\alpha + 2\beta)v + (\alpha + 3\beta)w\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Les vecteurs u, v et w appartiennent-ils à F ?
3. Donner une base de F.

Exercice 11. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u = (2, -3, 1)$ et $v = (2, -2, 1)$.

1. Quelle est la dimension de F ? Quelle est sa nature géométrique ?
2. Démontrer que le vecteur $w_1 = (0, 1, 0)$ est élément de F, mais que $w_2 = (0, 0, 1)$ ne l'est pas.
3. Calculer les coordonnées du vecteur $w_3 = (0, 4, 0)$ dans la base (u, v).
4. Fournir une caractérisation de F par une équation cartésienne.

Exercice 12. On considère les vecteurs $a = (2, -1, -1), b = (-1, 2, 3), c = (1, 4, 7), d = (1, 1, 2)$ et le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $E = \mathrm{Vect}(a, b, c, d)$.

1. Est-ce que (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que (a, b) est une base de E.
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant E.
4. Compléter la base (a, b) de E en une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les familles suivantes sont libres.

1. $(\cos, \sin)$;
2. $(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \exp)$;
3. (f_1, f_2, f_3) où, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, $f_k : t \mapsto t^k$;
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g_k : t \mapsto e^{kt}$.

Exercice 14. On considère $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3.

1. Justifier que les polynômes 1, X, $X(X-1)$, $X(X-1)(X-2)$ forment une base de E.
2. Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

Exercice 15. On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 2, et on note $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] : \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P = a + (2a - 3b)X + bX^2\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. Donner une base de F.

Exercice 16. On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$
\begin{array}{ll}
F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\} ; & F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y\} ; \\
F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\} ; & F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0 \text{ et } 2y - z = 0\} ; \\
F_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = y\} ; & F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0 \text{ et } y + z = 0\}.
\end{array}
$$

1. Pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, déterminer une base, la dimension et la nature géométrique du sous-espace vectoriel F_k.
2. (a) Déterminer $F_2 + F_3$.
   (b) Déterminer $F_2 \cap F_3$.
   (c) Est-ce que F_2 et F_3 sont supplémentaires ?
3. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.
4. Est-ce que F_1 et F_4 sont supplémentaires ?

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère E_a le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(1, 1, a), (1, a, 1)$ et $(a, 1, 1)$. Étudier la dimension de E_a selon les valeurs de a.

Exercice 18. On considère $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E.
2. Compléter la base obtenue à la question précédente en une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 19. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels distincts de $\mathbb{R}^6$, tous les deux de dimension 4. Quelle peut être la dimension de $F + G$? De $F \cap G$?

Exercice 20. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension 3, vérifiant $\dim F = 1$, $\dim G = 2$ et $F \not\subset G$.
Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 21. On considère $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0\}$ et $F = \mathrm{Vect}((1, 2, -3))$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base de cet espace vectoriel.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

Exercice 22. Soit $n \geq 1$ un entier. On considère $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^T = -A\}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : A^T = A\}$ celui des matrices symétriques.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\dfrac{A + A^T}{2} \in S_n(\mathbb{R})$ et que $\dfrac{A - A^T}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. A-t-on $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$, décomposer A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Exercice 23. On note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On considère F le sous-ensemble de E formé par les applications f telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. On note H l'ensemble des applications $t \mapsto at + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 24. On considère E l'ensemble des suites convergentes de nombres réels.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites qui convergent vers 0 sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.