Feuille d'exercices n° 1

MATRICES ET SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1. En utilisant l'algorithme du pivot de Gauss, étudier si les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse quand il existe :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants, en mettant en œuvre l'algorithme du pivot de Gauss :

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + 2z &= 5 \\ x - y - z &= 1 \\ x + z &= 3 \end{cases} ; \qquad (S_2) : \begin{cases} x + 2y + z &= 1 \\ 2x + 3y - z &= 4 \\ 3x + y - z &= 2 \end{cases} ; \qquad (S_3) : \begin{cases} x - y + z &= 0 \\ 5x + 2y - z &= 0 \\ -3x - 4y + 3z &= 0 \end{cases}.$$

Exercice 3. Déterminer un polynôme à coefficients réels P de degré 2 tel que $P(-1) = 0$, $P(1) = 1$ et $P(2) = 2$.

Exercice 4. Étudier si la matrice suivante est inversible et, s'il existe, calculer son inverse :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -6 \end{pmatrix} ; \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} ; \; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} ; \; E = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} ; \; F = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Parmi les quantités suivantes, dire lesquelles sont bien définies et les calculer :

$$A + B \; ; \; A + F \; ; \; A + 2F \; ; \; F - I_2 \; ; \; AB \; ; \; BA \; ; \; BC \; ; \; CB \; ; \; DE \; ; \; AE \; ; \; EA \; ; \; AF.$$

Exercice 6. On pose $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
3. S'il existe, déterminer l'inverse de A.

Exercice 7. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 + A - I_3$.
2. Justifier que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.

Exercice 8. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une matrice $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = 2I_3 + J$.
2. Calculer J^2, J^3 puis, pour tout $n \geq 4$, J^n.
3. En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, A^n.

Exercice 9. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est inversible en calculant A^{-1}.
2. *Une première méthode pour calculer les puissances de A.*
   (a) Calculer, A^2, puis A^3.
   (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
3. *Une deuxième méthode pour calculer les puissances de A.*
   (a) Déterminer une matrice $J \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ telle que $A = I_2 + J$.
   (b) Calculer J^2.
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n.
4. *Application à l'étude d'une suite de colonnes.* On considère $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de matrices colonnes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_n en fonction de n.
   (c) Étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Définition. Étant donnée une suite de matrices colonnes $\left(\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$*, on dit que cette suite converge lorsque les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent.*

Exercice 10. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices colonnes de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n + B$.

1. Déterminer une matrice colonne $C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui vérifie $C = AC + B$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer U_n en fonction de n.
4. Étudier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Étudier la convergence de la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de la valeur de α.

   Définition. Étant donnée une suite de matrices carrées $\left(\begin{pmatrix} a_n & c_n \\ b_n & d_n \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, on dit que cette suite converge lorsque les suites* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergent.*

Exercice 12. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On écrit A sous la forme d'une matrice par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} 3I_2 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ où } 0 \text{ est la matrice nulle dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n en fonction de B^n.
2. En utilisant un calcul effectué à l'exercice 9, exprimer A^n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible.
On considère l'application $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $X \mapsto AX$. Démontrer que f est bijective.

Exercice 14. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On appelle *déterminant* de M, noté $\det M$, la quantité $\det M = ad - bc$.

1. Effectuer les multiplications matricielles :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que si $\det M \neq 0$, alors M est inversible et que, dans ce cas :
$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$
3. Montrer que $\det M \neq 0$ si et seulement si M est inversible.
4. Dans cette question, on suppose M inversible. Soit u et v deux éléments de $\mathbb{C}$.

   Montrer que le système linéaire suivant, d'inconnue (x, y) :
$$\begin{cases} ax + by & = u \\ cx + dy & = v \end{cases}$$
   possède une et une seule solution, et que celle-ci est donnée par les formules :
$$x = \frac{ud - bv}{\det M} \qquad y = \frac{av - uc}{\det M}.$$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$ (attention ici 0 désigne la matrice nulle). Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$, si AB est nilpotente, alors BA est nilpotente.

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

1. Montrer que $\mathrm{Tr}(AA^T) = \mathrm{Tr}(A^T A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2$.
2. Montrer que A est la matrice nulle si et seulement si $\mathrm{Tr}(AA^T) = 0$.
3. Fournir un exemple qui montre que le résultat précédent n'est pas vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$. Sauriez-vous imaginer un résultat analogue qui serait, lui, exact ?

Exercice 17. Soit deux matrices carrées A et B de même taille. On suppose que toutes les lignes de A ont la même somme a et que toutes les lignes de B ont la même somme b. Montrer que toutes les lignes de AB ont la même somme, et préciser la valeur de celle-ci.

Suggestion : on pourra se servir du vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 18.

1. Soit A une matrice complexe à m lignes et n colonnes, et soit C et D deux matrices-colonnes à m entrées. Montrer que si le système linéaire $AX = C$ (d'inconnue X, matrice-colonne à n entrées) possède exactement une solution, alors le système linéaire $AY = D$ (d'inconnue Y, matrice-colonne à n entrées) en possède au plus une.
2. Donner un exemple de matrices A, C et D pour lesquelles le système $AX = C$ possède exactement une solution mais le système $AY = D$ n'en possède aucune.
3. Soit A une matrice complexe à m lignes et n colonnes et soit C une matrice-colonne à m entrées. Montrer que si le système linéaire $AX = C$ (d'inconnue X, matrice-colonne à n entrées) possède au moins deux solutions, alors il en possède une infinité.