Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info | UE : Algèbre 2

Contrôle continu n° 3

MARDI 21 MARS 2023 - DURÉE : 45 MINUTES

Questions de cours. On ne redemande pas la définition de $\mathbf{R}$-espace vectoriel qu'on admet donc dans tout cet exercice.

1. Donner la définition d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel *de dimension finie.*
2. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Donner la défintion de « F et G sont supplémentaires dans E ».

Correction.

1. La réponse à la première question est le contenu de la définition p. 32 du cours sur les espaces vectoriels (cette référence au cours et les suivantes sont celles du fichier pdf sur la page de l'UE).

2. La réponse à la seconde question est le contenu de la définition p. 16 du cours sur les espaces vectoriels.

Exercice 1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbf{R}$ la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{3X^2-1}{X(X^2-1)}\,.$$

Correction. En posant $P(X) = 3X^2 - 1 \in \mathbf{R}[X]$ et $Q(X) = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1) \in \mathbf{R}[X]$, a $F(X) = \frac{P(X)}{Q(x)} \in \mathbf{R}(X)$ avec $\deg(P) < \deg(Q)$ (qui peut aussi s'écrire $\deg(F) < 0$). Le théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbf{R}$ assure alors qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ uniques (toujours autant que le degré de Q) telles que

$$\frac{3X^2-1}{X(X^2-1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}\,. \tag{$\star$}$$

Commençons par calculer a. On peut multiplier alors l'identité ($\star$) par X pour écrire

$$\frac{3X^2-1}{X^2-1} = a + X\left(\frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}\right).$$

En observant que 0 n'est plus pôle (zéro du dénominateur sous forme simplifiée) dans cette identité, on peut évaluer en 0 pour obtenir

$$\frac{-1}{-1} = \boxed{1 = a} + 0\,.$$

Calculons maintenant b. On peut multiplier alors l'identité ($\star$) par $X-1$ pour écrire

$$\frac{3X^2-1}{X(X+1)} = b + (X-1)\left(\frac{a}{X} + \frac{c}{X+1}\right).$$

En observant que 1 n'est plus pôle dans cette identité, on peut évaluer en 1 pour obtenir

$$\frac{2}{2} = \boxed{1 = b} + 0\,.$$

Calculons maintenant c. On peut multiplier alors l'identité ($\star$) par $X+1$ pour écrire

$$\frac{3X^2-1}{X(X-1)} = c + (X+1)\left(\frac{a}{X} + \frac{b}{X-1}\right).$$

En observant que -1 n'est plus pôle dans cette identité, on peut évaluer en -1 pour obtenir

$$\frac{2}{(-1)(-2)} = \boxed{1 = c} + 0\,.$$

Exercice 2. Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$, l'espace vectoriel constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. Donner une base de E et en rappeler la dimension. *Pour cette seule question, on ne demande pas de justification.*
2. (a) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (X(X-1), (X-1)(X+1), X(X+1))$ est une famille libre de E.
   (b) La famille $\mathcal{F}$ est-elle une base de E ? Justifier votre réponse.
   (c) Justifier que le polynôme $P = 1$ appartient à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
   (d) (Bonus, non posé) Déterminer les coordonnées de ce polynôme P dans $\mathcal{F}$.

Correction.
1. D'après le cours (exemple p. 35), la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$ qui comporte trois vecteurs, d'où $\mathbf{R}_2[X]$ est de dimension 3.
Remarque. Confusion fréquente : l'ensemble des polynômes de degré *égal à* 2 n'est *pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$ (il ne contient pas le polynôme nul).
2. (a) Soient $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tels que

$$aX(X-1) + b(X-1)(X+1) + cX(X+1) = 0_{\mathbf{R}[X]}\,.$$

Évaluant cette identité en -1, on obtient $2a = 0$; évaluant cette identité en 0, on obtient $-b = 0$; évaluant enfin cette identité en 1, on obtient $2c = 0$. D'où $a = b = c = 0$ et la famille est libre.
2. (b) La famille $\mathcal{F}$ étant une famille libre à trois vecteurs dans E de dimension 3, c'est une base de E (proposition du cours p.38).
2. (c) En particulier, cette famille est génératrice dans E. Autrement dit, tout polynôme de E (en particulier $P = 1$) est dans $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.
2. (d) Cherchons donc $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ tels que

$$aX(X-1) + b(X-1)(X+1) + cX(X+1) = 1_{\mathbf{R}[X]}\,.$$

Évaluant cette identité en -1, on obtient $2a = 1$; évaluant cette identité en 0, on obtient $-b = 1$; évaluant enfin cette identité en 1, on obtient $2c = 1$. On a donc bien ce que l'on cherche pour $(a, b, c) = (1/2, -1, 1/2)$. *Réciproquement, on vérifie que ces nombres conviennent.*
Remarque. L'existence dans l'argument ci-dessus redonne la réponse obtenu abstraitement dans la question précédente. On retrouve aussi l'unicité (on n'a pas le choix dans l'argument) déjà connue comme conséquence de la liberté de la famille $\mathcal{F}$. Si on invoque la question 2 (c), la réciproque à la fin de l'argument n'est pas nécessaire ; par contre, si on ne l'utilise pas, il faut bien vérifier que les conditions *nécessaires* obtenues sur (a, b, c) pour avoir la relation désirée sont bien *suffisantes* (il pourrait ne pas y avoir de solution : essayer le même argument en remplaçant $1_{\mathbf{R}[X]}$ par X^3...).

Exercice 3. Soient $e_1 = (1, 1, 1)$ et $e_2 = (1, 2, -1)$ deux vecteurs de $\mathbf{R}^3$. On pose

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x + y + z = 0\}$$

et $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$. *On admet que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.*

1. Déterminer une base de F. Donner la dimension de F.

On admet que (e_1, e_2) est une base de G.

2. En déduire que les sous-espaces vectoriels F et G ne sont pas supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
3. Les sous-espaces F et $\mathrm{Vect}(e_1)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$?

4. L'ensemble $F \cup \mathrm{Vect}(e_1)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$?

Correction.

1. On peut écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \iff x+y+z=0 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x-y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{:=e_3} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{:=e_4} .$$

La famille (e_3, e_4) est donc génératrice dans F. Montrons maintenant qu'elle est libre et supposons pour cela que $xe_3 + ye_4 = 0_{\mathbf{R}^3}$ pour un $(x,y) \in \mathbf{R}^2$. Observant que la première composante de $xe_3 + ye_4$ est x et que la seconde composante de $xe_3 + ye_4$ est y, obtient immédiatement (famille dite "échelonnée") que $x = y = 0$, ce qui conclut la preuve de la liberté de cette famille. Au bilan, cette famille est une base de F à deux vecteurs, d'où le sous-espace vectoriel F est de dimension 2.

2. Le sous-espace vectoriel G ayant une base à deux vecteurs, il est également de dimension 2. Or, par la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) = 2 + 2 - \dim(F+G) \geq 1 ,$$

la dernière égalité utilisant que $F + G \subset \mathbf{R}^3 \implies \dim(F+G) \leq 3$. On en déduit donc que $F \cap G$ n'est pas réduit à $\{0_{\mathbf{R}^3}\}$ (auquel cas il serait de dimension 0), i.e. F et G ne sont pas en somme directe et donc pas supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.

3. Comme $e_1 \neq 0$, on a $\dim(\mathrm{Vect}(e_1)) = 1$. Utilisant maintenant le résultats p. 43 du cours, il suffit de vérifier que $H := \mathrm{Vect}(e_1) \cap F = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$, car on constate bien que $\dim(F) + \dim(\mathrm{Vect}(e_1)) = \dim(\mathbf{R}^3)(= 3)$. Comme H est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Vect}(e_1)$, ce dernier étant de dimension 1, on a $\dim(H) \leq 1$. On obtient bien $H = \{0_{\mathbf{R}^3}\}$ si $\dim(H) = 0$. Pour conclure, il suffit donc d'exclure l'autre cas $\dim(H) = 1$. Si par contradiction $\dim(H) = 1$ et valait donc $\dim(\mathrm{Vect}(e_1))$, comme $H \subset \mathrm{Vect}(e_1)$, on aurait $H = \mathrm{Vect}(e_1)$ (une inclusion et égalité des dimensions entre sous-espaces vectoriels), et en particulier, comme $(H =)\mathrm{Vect}(e_1) \cap F \subset F$ par définition, on aurait $e_1 \in F$: ce dernier point étant à rejeter car $1+1+1 \neq 0$, la preuve est complète.

4. Pour répondre à cette question, il suffit de montrer que l'*un* des points de la définition d'un sous-espace vectoriel n'est pas vérifié *en fournissant un contre-exemple.* On contredit la stabilité par somme : prenant $X = e_3 \in F$ (voir question 1) et $Y = e_1$, on a que X et Y sont dans $F \cup \mathrm{Vect}(e_1)$, mais

$$X + Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin (F \cup \mathrm{Vect}(e_1)) ,$$

car $2 + 1 + 0 \neq 0$ et $(2, 1, 0)$ n'est pas colinéaire à e_1.