Sol Ex

Pendant le CM 5
Fiche de TD 2, Ex. 20,

02/03
Gricey

Exple: Représenter les solutions sous forme paramétrique.

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$$

1) échelonner pr. trouver x, y et z.

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -2y-2t=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1-z-t \\ -2y=-1+2t \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{1}{2}-z \\ y=-\frac{1}{2}-t \end{cases}$$

2) Ecrire sous forme des paramètres.

$z=\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $t=\lambda_2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

une solut° : "+ λ × (vect) + λ (vect)"

Rappel: Polynôme ?

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X^i$$

plus grd coeff. $\neq 0$. pour que soit non-nul.

Exercice 20.

Considérer $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré au maximum n.

a) Soit $k \leq n$. Montrer que chaque famille $\{P_0, P_1, ..., P_k\}$ des polynômes tel que le degré de P_m est égal a m est libre.

b) Soit $n = 2$. Donner trois polynômes de degré deux chacun qui forment une famille libre.

c) Montrer explicitement que les trois polynômes trouvés ci-dessus engendrent $\mathbb{R}_2[X]$.

d) Conclure que vos polynômes forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$?

e) Montrer explicitement que la famille $\{1, X, X^2\}$ est libre dans $\mathbb{R}_n[X]$, $n \geq 2$, et génératrice dans $\mathbb{R}_2[X]$. Conclure à nouveau sur la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.

f) *En utilisant* le fait que $R_2[X]$ est de dimension 3, existe-t-il un argument plus simple pour arriver à la conclusion **d)** ci-dessus, sans prouver séparément **b)** et **c)** ?

Exo: 20

Rappel: "Libre $\iff \sum_{m=0}^{k} \lambda_m \cdot P_m = 0 \implies \lambda_m = 0 \quad \forall m$" (comb. lin.)

↳ toute combination linéaire de ces vecteurs qui vont 0

ex. $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

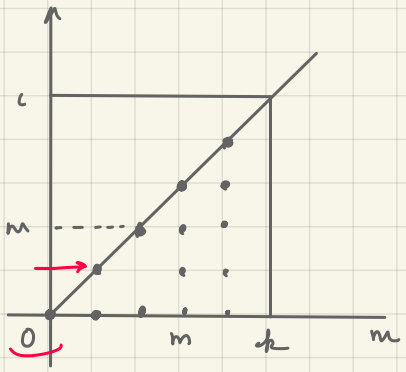
a) Mq $\{P_0, P_1, ..., P_k\}$ avec P_n de degré n est une famille libre.

Soit $(\lambda_m) \in \mathbb{R}^{k+1}$, $m \in [\![0,k]\!]$ t.q. $\sum_{n=0}^{k} \lambda_m \cdot P_m = 0$

$$P_m(X) = \sum_{i=0}^{m} (a_{m,i}) X^i$$

$$\sum_{m=0}^{k} \lambda_m \left(\sum_{i=0}^{m} \lambda_m (a_{m,i}) X^i \right) = 0$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{m=i}^{k} \lambda_m a_{m,i} \right) X^i = 0$$



$$\iff \forall m \in [\![0,k]\!] \quad \sum_{m=i}^{k} a_{m,i} = 0$$

"un Polynôme = 0 qd tt's ces coeff's st égaux à 0"

* Sous forme de syst.

pour $i=k$: $\lambda_k a_{k,k} = 0$

pour $i=k-1$: $\lambda_k a_{k,k-1} + \lambda_{k-1} a_{k-1,k-1} = 0$

↳ coeff devant X^{k-1} dans $P_{k-1}(X)$

b) Soit $n = 2$. Donner trois polynômes de degré deux chacun qui forment une famille libre.

$(1, X, X^2) \subset \mathbb{R}[X]$ $\qquad X^2+bX+c$

D'après a) c'est libre

Mq $\{X^2, X^2+X, X^2+X+1\}$ est libre

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ t.q. $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 (X^2+X) + \lambda_3 (X^2+X+1) = 0$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X^2 + (\lambda_2+\lambda_3)X + \lambda_3 = 0$$

"un Polynôme = 0 qd tt's ces coeff's st égaux à 0"

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Pour mq fam. lib. très souvent on revient aux système de eq's. → échelonné triangulé

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Thm:
fam. libre de n vect. $\in \mathbb{R}^n$ est aussi fam. génératrice

c) Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ $P(X) = aX^2+bX+c$
On cherche $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ t.q
$\lambda_1 X^2 + \lambda_2(X^2+X) + \lambda_3 (X^2+X+1) = aX^2+bX+c$

$\Rightarrow$ 2 Polynômes st égaux quand leurs coeff's sont égaux (par identification).

$$\begin{cases} \lambda_3 = c \\ \lambda_2 + \lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = c \\ \lambda_2 = b-c \\ \lambda_1 = a-(b-c)-c = a-b \end{cases}$$

d) Coord. des familles libre et génératrice ds base de $\mathbb{R}_2[X]$.

$\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$

$\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ ⚠

exple: $1 = 0\ X^2 - 1\ (X^2+X) + (X^2+X+1)$

e) aX^2+bX+c |

qd on a mq c'est libre et géné.
taille n
ds $\mathbb{R}^n$ est auss