SolEx TD1 - Ex 33

23/02
Gricey
ALGÈBRE 2

D $ax+by+c=0$
D' $a'x+b'y+c'=0$

① Intersection ?

$D \cap D' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ $\det A = 0$

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \iff$ $\boxed{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B}$ $\quad -c \ldots$

il existe une telle solution ssi le rang de $(A|B)$ = rang (A)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -c \\ -c' \end{pmatrix}$

Cas (*).

* Si A inversible, il existe une solution

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} {}^t\mathrm{Comat}(A) \cdot B = \frac{1}{ab'-a'b} \begin{pmatrix} b' & -b \\ -a' & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -c \\ -c' \end{pmatrix} = \frac{1}{(ab'-a'b)} \cdot \begin{pmatrix} \underbrace{bc'-cb'}_{\text{une substitution}} \\ ca'-c'a \end{pmatrix} =$

Pareil

Cramer

$\begin{pmatrix} \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \\ \frac{-\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \end{pmatrix}$

* A non inversible $\det(A) = 0$ $\quad (\mathrm{rang}(A) = 1)$

(a, b) est proportionnel à $(a'\ b')$ (= même droite)

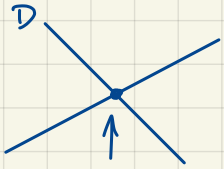
SPDG $a \neq 0$ $\quad \frac{a'}{a} =: k$ et $b' = kb$

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax+by+c=0 \\ k(ax+by)+c'=0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax+by+c=0 \\ c'-kc=0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax+by+c=0 \\ ac'-a'c=0 \end{cases}$

Sans perte de généralité

* si $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ $\quad$ (ou $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0$ équivalents) $\implies$ $D \cap D' = D = D'$ droites confondues

* si $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$ $\implies$ les droites sont parallèles $\therefore$ pas de solution.



$D \neq \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \\ \frac{-\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \end{pmatrix}$ $D \cap D'$

cas a)

si $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0$

D D'

pas de solution

D et D' parallèles

cas b)

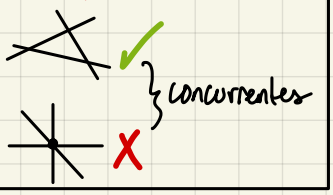
si $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$ ou $\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c \end{vmatrix} = 0$

D ∩ D

droites confondues

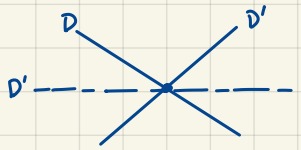
③

Rappel :



Supposons $DD'D''$ concurrentes

$\Rightarrow D \cap D' \neq \varnothing$



$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$

et le point d'intersection est

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

et D'' passe par ce point

$$\Leftrightarrow a'' \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} - b'' \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} + c'' = 0$$

$$\Leftrightarrow a'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} + b'' \left(-\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}\right) + c'' \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$ (développer la dernière ligne)

Si $D \parallel D'$ ou confondues

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$$ (développer la dernière colonne)

($\Leftarrow$)

si $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0$

* Si : $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$ (les droites sont $\parallel$ ou confondues)

soit

peut être non nulle.

* SPDG pcq

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

($\Leftrightarrow D \cap D' \neq \emptyset$)

D et D' se coupent en : $\frac{1}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$$a'' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - b'' \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + c'' \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow a'' \frac{\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} + b''(-1) \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}} + c'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in D''$$

$$\Leftrightarrow D \cap D' \cap D'' \neq \emptyset$$