SolEx TD1

Gricey
ALGÈBRE 2

Exercice 17. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

• Lien avec les systèmes :

le produit matriciel : $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+z \\ -x-y+2z \\ -2x-2y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Rappel :

Si A inversible : $(\exists A^{-1}$ t.q. $A^{-1} \cdot A = I)$

$$A^{-1}\left(A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = (A^{-1} \cdot A)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Pivot

$$\begin{cases} L_1 & x+2y+z=a \\ L_2 & -x-y+2z=b \\ L_3 & -2x-2y+6z=c \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 & x+2y+z=a \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 & y+3z=a+b \\ L_3 \leftarrow L_3+2L_1 & 2y+8z=2a+c \end{cases}$$

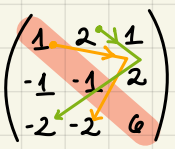
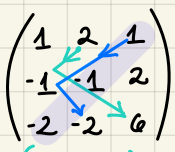
$$\begin{cases} L_1 & x+2y+z=a \\ L_2 & y+3z=a+b \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_2 & 2z=c-2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1 & x+2y+z=a \\ & y=a+b-\frac{3}{2}c+3b=a+4b-\frac{3}{2}c \\ L_3 \leftarrow L_3/2 & z=\frac{1}{2}c-b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=a-2y-z=a-2\left(a+4b-\frac{3}{2}c\right)-\left(\frac{1}{2}c-b\right) \\ \quad\quad\quad\

Avec Méthode "Comatrice"

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$(1\cdot-1\cdot6) - (1\cdot2\cdot-2) + (2\cdot2\cdot-2) - (2\cdot-1\cdot6) + (1\cdot-1\cdot-2) - (1\cdot-1\cdot-2)$

$-6 \quad -4 \quad -8 \quad -12 \quad +2 \quad +2$

- Calculer le déterminant

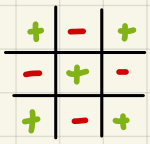
$$\det(A) = (-6-8+2) - (2-4-12)$$
$$= -12 + 14 = 2$$

→ "C'est cohérent pcq c'est le seule nb comme facteur"

Autre méthode :

$$\det(A) = 1\times(-2) - (-1)\cdot 14 + (-2)\cdot 5 = 2$$
$$-2 \quad +14 \quad -10$$

$$\text{Si } \det(A) \neq 0 \quad \hookrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t\text{Comat}(A)$$



échecs / chess

- Calculer la Comat(A) =

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -14 & 8 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

(+2 au-dessus de la 2e colonne)

(-) Mat 3×3

$\det = (-6) \ominus (-4) = -2$

$(-1\cdot6) \ominus (2\cdot-2) = -2$ (= 2)

$(-1\cdot-2) \ominus (-2\cdot-1) = 0$

$(2\cdot6) \ominus (-2\cdot1) = 14$

$6 \ominus -2 = 8$

$(1\cdot-2) \ominus (-2\cdot2) = 2$

$(2\cdot2) \ominus (-1\cdot1) = 5$

$(1\cdot2) \ominus (-1\cdot1) = 3$

$(1\cdot-1) \ominus (-1\cdot2) = 1$

- Appliquer la formule (☆) pour obtenir la matrice A^{-1}

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -14 & 8 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -1 \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -7 & \frac{5}{2} \\ 1 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$