Sol Ex

Pendant le CM 12
Fiche de TD 3, Ex. 42

27/04
Gricey
ALGÈBRE 2

$[f]_{B,\tilde{B}}$ (base d'arrivée ↓, base de départ ↓)
matrice de f

$[f\circ g]_{B'',B} = [f]_{B'',B'}\,[g]_{B',B}$

$[id]_{\mathcal{E},B} = [id]_{B,\mathcal{E}} = [id]^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = I$
$\Rightarrow P_{\mathcal{E},B} = P_{B,\mathcal{E}}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = [f]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$$

2) $P_{\mathcal{E},B} = [id]_{\mathcal{E},B}$ (ii) ↑, (i))

$$P_{\mathcal{E},B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
(ii) 2 ↓ → la matrice de passage
$id(u'') = u$ (i)), $id(v'') = v$

3) $P = P_{\mathcal{E},B}$
$P^{-1} = P_{B,\mathcal{E}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&2&1&0&0\\ -1&-1&-2&0&1&0\\ 1&1&1&0&0&1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&2&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&-1&-1&-1&0&1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&2&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&-1&0&1&1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&2&1&0&0\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&-1&-1 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&-1&0&2\\ 0&1&0&1&1&0\\ 0&0&1&0&-1&-1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

4) $R = [f]_{B,B} = [id \circ f \circ id]_{B,B}$ $\quad P^{-1}\cdot A\cdot P$ (=)

$= [id]_{B,\mathcal{E}}\cdot[f]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}\cdot[id]_{\mathcal{E},B} = P_{B,\mathcal{E}}\cdot[f]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}\cdot P_{\mathcal{E},B}$

$R =$

	P
A	$\begin{pmatrix} 1&2&-2\\ -1&-2&1\\ 1&1&-1 \end{pmatrix}$
P^{-1}	$\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&0&-1\\ 0&1&0 \end{pmatrix}$

Vérifications 1ère colonne :

$A\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$f(u) = u$

$A\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix} = w$

6) $R^2 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$

$R^4 = (R^2)^2 = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$

$A^{4n} = (PRP^{-1})^{4n}$
$PRP^{-1}\;PRP^{-1}\;PRP^{-1}\ldots\ldots$
$= PR^{4n}P^{-1} = P(R^4)^{n-1}P^{-1} = PIP^{-1} = I$

Relation
$R = P^{-1}\cdot A\cdot P$
$\Leftrightarrow A = P\cdot R\cdot P^{-1}$

$(PM_1P^{-1})(PM_2P^{-1})$ (Id)
$= PM_1M_2P^{-1}$