# Sol Ex

Pendant le CM 10
Fiche de TD 3, Ex. 8 & 27.

6/04
Gricey
ALGÈBRE 2

## Ex. 8

$\Psi : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$.
$P \longmapsto P(X+1) - P(X)$

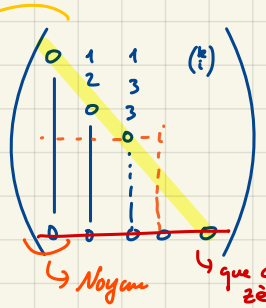
1) Mq. $\Psi$ est lin.
Soient $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
$\Psi(P_1 + \lambda P_2) = (P_1 + \lambda P_2)(X+1) - (P_1 + \lambda P_2)(X)$
$= P_1(X+1) + \lambda \cdot P_2(X+1) - P_1(X) + \lambda P_2(X)$
$= P_1(X+1) - P_1(X) + \lambda\left(P_2(X+1) + P_2(X)\right) = \Psi(P_1) + \lambda\,\Psi(P_2)$

2) $\ker \Psi$ : $\{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(X+1) - P(X) = 0\}$ (à montrer → déf.)
- Soit $P \in \ker \Psi$ → $P(0) = P(1) \dots = P(2) = P(3)$
On prend un élément du noyau : $P(n) = P(0)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ → le seul polynôme qui a une infinité de racines est 0 !
$\Rightarrow P(X) - P(0)$ a une infinité des racines $(\mathbb{N})$
$\Rightarrow P(X) - P(0) = 0 \Rightarrow \boxed{P(X) = P(0)}$
$\Rightarrow P$ est un polynôme constant.
- Réciproquement : si $P$ est cst $P(X+1) - P(X) = 0 \Rightarrow P \in \ker$
- Conclusion : $\ker \Psi$ = polynômes constants = vect $(1)$.

mat $(P)$ dans $(1, X, \dots, X^n)$ (Base canonique)
$\Psi(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$

$\Psi(1) = 1 - 1 = 0$
$\Psi(X) = X + 1 - X = 1$

Matrice échelonnée




Le noyau est vect $(1, 1, \dots)$

3) Formule du rang
$\text{rg}(\Psi) = \dim \mathbb{R}_n[X] - \dim(\ker(\Psi))$
$= n + 1 - 1 = \boxed{n}$

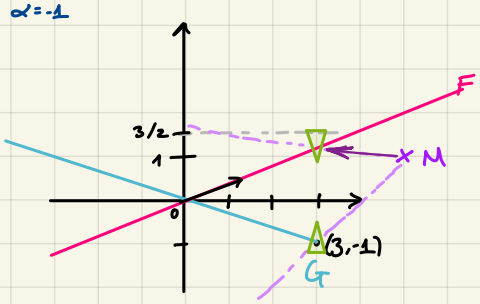
4) $\text{Im}(\Psi) = \text{Vect}(1, X, \dots, X^{n-1})$

5) $\oplus$ ? On n'est pas en somme directe. $\text{Im}(\Psi) \oplus \ker(\Psi)$
$\text{Im}(\Psi) \cap \ker(\Psi) = \text{Vect}(1)$

## Ex. 27

$\alpha \in \mathbb{R}$ $F = \text{Vect}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $G = \text{Vect}\begin{pmatrix}3\\\alpha\end{pmatrix}$

$\alpha = -1$




1) $\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & \alpha\end{vmatrix} = 2\alpha - 3 = 0$
$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$

- Si $\alpha \neq \frac{3}{2}$, $F \oplus G = \mathbb{R}^2$
- sinon $\left(\alpha = \frac{3}{2}\right)$, $F = G$

($F$ n'est pas supplémentaire à $G$)

(*) Point M (parallélog.)

2) Si $\alpha = 2$
soit $M = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ (Négligeable)
$\begin{cases} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{cases}$ → On veut $\lambda_1$ pour avoir une projection sur $F$, parallèlement à sur $G$. → Donc on garde $\lambda_1$, la coord. #1 sur $F$.
$\Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_2 = x - 2y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2y - x \\ \lambda_1 = y - 2(2y - x) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 2y - x \\ \lambda_1 = -3y + 2x \end{cases}$

$p\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \underbrace{(-3y + 2x)}_{\lambda_1} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x - 6y\\2x - 3y\end{pmatrix}$

$M = \text{mat}(p) = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

3) $p\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$p\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = M$

(*) Preuve 2 de 2)

- Une éq. cartésienne de droite F:

$\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{x - 2y = 0}$

- Une éq paramétrique de la droite parallèle à G passant par M.

$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Intersection:

$(\underbrace{x+3\lambda}_{\tilde{x}}) - 2(\underbrace{y+\lambda x}_{\tilde{y}}) = 0$

$x - 2y = \lambda(2\alpha - 3)$

$\lambda = \dfrac{x-2y}{(2\alpha-3)} \quad \boxed{\alpha \neq \frac{3}{2}}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} x + \dfrac{3(x-2y)}{(2\alpha-3)} \\ y + \dfrac{\alpha(x-2y)}{(2\alpha-3)} \end{pmatrix}$

si $\alpha = 2$:

$\begin{pmatrix} 4x & -6y \\ 2x & -3y \end{pmatrix}$

4) Droites orthog. ?

$F \perp G$ (produit scalaire)

$\Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$\Leftrightarrow 6 + \alpha = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -6}$

$\underline{P(M)} \quad$ si $\alpha = -6$

$\parallel$

$\begin{pmatrix} x + \dfrac{3(x-2y)}{-15} \\ y - \dfrac{6(x-2y)}{-15} \end{pmatrix} = + \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 15x - 3(x-2y) \\ 15y + 6(x-2y) \end{pmatrix} = \dfrac{1}{15} \begin{pmatrix} 12x + 6y \\ x + 3y \end{pmatrix}$

Div. par 3

$M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Symétrique donc ok!

son im. est engend. par 2,1.

$\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = \mathbb{R}^2 \quad (\alpha = -6)$ $\longrightarrow$ n'est pas vrai pour les projections!