Exercices Complémentaires

→ Ex.4 et 17 de la fiche de TD1. (traités en CM1)

26/01 Maricey ALGÈBRE 2

Exercice 4. Résoudre le système suivant.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 & L_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3 & L_2 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1 & L_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 & L_4 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7 & L_5 \end{cases}$$

→ 5 eq's, 4 inconnus (x) et 2 eq's liées.
∴ 3 eq's, 4 inconnus

A stuce: on multiplie certaines égalités par 3

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{2}{3} L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{3} L_1$, $L_5 \leftarrow L_5 - \frac{7}{3} L_1$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 0 + \frac{5}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 + \frac{11}{3}x_4 = \frac{5}{3} \\ 0 - 5x_2 - 2x_3 - 11x_4 = -5 \\ 0 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 + \frac{8}{3}x_4 = \frac{11}{3} \\ 0 - \frac{11}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_3 - \frac{17}{3}x_4 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 0 + 5x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 5 \\ 0 - 5x_2 - 2x_3 - 11x_4 = -5 \\ 0 + 2x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 11 \\ 0 - 11x_2 + 4x_3 - 17x_4 = 7 \end{cases}$$

pivot!

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 0 + 5x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 5 \\ 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + \frac{21}{5}x_3 + \frac{18}{5}x_4 = 9 \\ 0 + \frac{42}{5}x_3 + \frac{36}{5}x_4 = 18 \end{cases}$$

$L_3 = L_3 + L_2$, $L_4 \leftarrow L_4 - \frac{2}{5} L_2$, $L_5 \leftarrow L_5 + \frac{11}{5} L_2$

$\frac{5}{6}$

$\frac{42}{6} = 7$ $\frac{36}{6} = 6$

ds tt les eq's! ∴ paramètre

$\frac{21}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{21}{3} = 7$ $\frac{18}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{18}{3} = 6$

$L_3 \leftarrow L_4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)$, $L_4 \leftarrow L_5 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)$

$\frac{42}{6} = 7$ $\frac{36}{6} = 6$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 5x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 5 \\ 7x_3 + 6x_4 = 15 \\ 7x_3 + 6x_4 = 15 \end{cases}$$

identique

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 - 2x_4 \\ 5x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 5 - 11x_4 \\ 7x_3 = 15 - 6x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 0 = -\frac{2}{7}(15 - 6x_4) + (2 - 2x_4) \\ 5x_2 + 0 = -\frac{2}{7}(15 - 6x_4) + (5 - 11x_4) \\ x_3 = \frac{1}{7}(15 - 6x_4) \end{cases}$$

$\frac{1}{7}(5 - 65x_4)$

(12) + (-67)

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}\left[-\frac{2}{7}(1 - 13x_4) - \frac{2}{7}(15 - 6x_4) + \frac{1}{7}(14 - 14x_4)\right] \\ x_2 = \frac{1}{7}(1 - 13x_4) \\ x_3 = \frac{1}{7}(15 - 6x_4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \left(\frac{6}{7}\right) - \left(\frac{8}{7}\right) x_4 \\ x_2 = \left(\frac{1}{7}\right) - \left(\frac{13}{7}\right) x_4 \\ x_3 = \left(\frac{15}{7}\right) - \left(-\frac{6}{7}\right) x_4 \end{cases}$$

Exercice 17. Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Le pivot: pour éliminer!

$$\begin{cases} x + 2y + z = a & L_1 \\ -x - y + 2z = b & L_2 \\ -2x - 2y + 6z = c & L_3 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 0 + y + 3z = a + b \\ 0 + 2y + 8z = 2a + c \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ 0 + y + 3z = a + b \\ 0 + 0 + 2z = c - 2b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a - \frac{1}{2}(c - 2b) - 2a - 4b + \frac{3}{2}c = -a - 3b + c \\ y = a + b - \frac{3}{2}(c - 2b) = a + 4b - \frac{3}{2}c \\ z = \frac{1}{2}(c - 2b) \end{cases}$$

-8b + 3c ! erreur! → À vérifier

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a - 3b + c \\ a + 4b - \frac{3}{2}c \\ 0 - b + \frac{1}{2}c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_1 + L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow L_3 / 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -7 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

échelonné réduit

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -14 & 5 \\ 2 & 8 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$