Complément de correction pour la fiche 2 du cours d'algèbre 2

Exercice 18

Question a

Montrons que $((1,2,3),(4,5,6))$ est libre. Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + 4\mu & = & 0 \\ 2\lambda + 5\mu & = & 0 \\ 3\lambda + 6\mu & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + 4\mu & = & 0 \\ -3\mu & = & 0 \\ -6\mu & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc $\boxed{((1,2,3),(4,5,6)) \text{ est libre.}}$

Autre méthode : Montrons que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

est de rang 2. On applique l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2, \quad L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$$

Donc la matrice est de rang 2, d'où $\boxed{\text{la famille est libre.}}$

Complétons la famille en une base de $\mathbb{R}^3$. On remarque qu'en considérant le vecteur $(1,0,0)$, la famille $((1,2,3),(4,5,6),(1,0,0))$ est libre car

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}1&4&1\\2&5&0\\3&6&0\end{pmatrix} &= 1\times\det\begin{pmatrix}2&5\\3&6\end{pmatrix}+0+0\\ &= 12-15\\ &= -3\\ &\neq 0\end{aligned}$$

si bien que $\boxed{((1,2,3),(4,5,6),(1,0,0)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ (car ce dernier est de dimension 3).

Autre méthode : on calcule le produit vectoriel

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times 6-3\times 5\\3\times 4-1\times 6\\1\times 5-2\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

ce qui nous donne que $\boxed{((1,2,3),(4,5,6),(-3,6,-3)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$ Attention : cette méthode ne fonctionne qu'en dimension 3 !

Question b

Montrons que la matrice

$$\begin{pmatrix}1&2\\2&4\\3&3\end{pmatrix}$$

est de rang 2. On applique l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\0&-3\end{pmatrix} \qquad L_2\leftarrow L_2-2L_1,\quad L_3\leftarrow L_3-3L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&2\\0&-3\\0&0\end{pmatrix} \qquad L_2\leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&0\end{pmatrix} \qquad L_2\leftarrow -\frac{1}{3}L_2$$

Donc la matrice est de rang 2, d'où $\boxed{((1,2,3),(2,4,3)) \text{ est libre.}}$

Complétons la famille en une base de $\mathbb{R}^3$. On remarque qu'en considérant le vecteur $(1,0,0)$, la famille $((1,2,3),(2,4,3),(1,0,0))$ est libre car

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} &= 1 \times \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + 0 + 0 \\
&= 6 - 12 \\
&= -6 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

si bien que $\boxed{((1,2,3),(2,4,3),(1,0,0)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$ (car ce dernier est de dimension 3).

Question c

Montrons que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

est de rang 2. On applique l'algorithme du pivot de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1, \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$$

Donc la matrice est de rang 2, d'où $\boxed{((1,1,1,1),(2,2,3,4)) \text{ est libre.}}$

Autre méthode : On peut aussi appliquer l'algorithme de Gauss sur les colonnes. Dans ce cas, il y a moins de calculs à faire. Je vous laisse les terminer...

Complétons la famille en une base de $\mathbb{R}^4$. On remarque qu'en considérant les vecteurs $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$, la famille $((1,1,1,1),(2,2,3,4),(1,0,0,0),(0,1,0,0))$ est libre car

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} + 0 + 0 + 0 \\
&= 1 \times \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + 0 + 0 \\
&= 4 - 3 \\
&= 1 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

(où on développe successivement le déterminant par rapport à la colonne de droite). Si bien que $\boxed{((1,1,1,1),(2,2,3,4),(1,0,0,0),(0,1,0,0)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4}$ (car ce dernier est de dimension 4).

Autre méthode : Si on applique l'algorithme de Gauss sur les colonnes dans la première partie de la question, on peut voir immédiatement par quels vecteurs compléter la famille libre pour en faire une base. En effet, les opérations élémentaires sur les colonnes conservent l'image de la matrice de taille 4×2, si bien qu'on obtient que $\mathrm{Vect}((1,1,1,1),(2,2,3,4))$ est égal au sous-espace vectoriel engendré par deux nouveaux vecteurs, plus simples. Ainsi, il est plus facile de trouver deux vecteurs complétant la famille en une base. Je vous laisse faire les calculs...

Exercice 19

Question a

Le produit vectoriel calculé en 18-a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 6 - 3 \times 5 \\ 3 \times 4 - 1 \times 6 \\ 1 \times 5 - 2 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

nous donne qu'en posant $w = (1,-2,1)$ (qui est un multiple de $(-3,6,-3)$, et que nous choisirons pour simplifier les calculs), F est défini par l'équation cartésienne

$$\boxed{F = \{x \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \langle x|w\rangle = 0\} = \{x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad a - 2b + c = 0\}}$$

Rappel : Ceci (le fait de déduire d'un produit vectoriel une équation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$) est un résultat général, qui est dans votre cours ou qui s'ensuit immédiatement. Néanmoins, voici un rappel de pourquoi c'est vrai, prouvé pour ce cas particulier. Par les propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel écrites dans le cours

$$\left\{\begin{array}{lclcl} \langle u|w\rangle & = & \langle u|(u\wedge v)\rangle & = & 0 \\ \langle v|w\rangle & = & \langle v|(u\wedge v)\rangle & = & 0 \end{array}\right.$$

De plus, tout élément de $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de la forme $\lambda u + \mu v$, qui vérifie donc

$$\langle \lambda u + \mu v|w\rangle = \lambda\langle u|w\rangle + \mu\langle v|w\rangle = 0$$

Donc $F \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \langle x|w\rangle = 0\}$. Or $\{x \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \langle x|w\rangle = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, de dimension au plus 2 car il ne contient pas w (car $\langle w|w\rangle = \|w\|^2 \neq 0$), et $\dim F = 2$ (car $((1,2,3),(4,5,6))$ est libre). D'où l'égalité $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad \langle x|w\rangle = 0\}$.

Autre méthode : La famille (u,v) est libre car u et v ne sont pas colinéaires. Pour tout $x = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a donc $x \in F = \mathrm{Vect}(u,v)$ si et seulement si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 5 & b \\ 3 & 6 & c \end{pmatrix} = 2$$

ce qui est également équivalent à la condition que la famille $((1,2,3),(4,5,6),(x,y,z))$ soit liée, ce qui équivaut à

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 2 & 5 & b \\ 3 & 6 & c \end{pmatrix} = 0$$

Appliquons le pivot de Gauss sur cette matrice, pour déterminer pour quelles valeurs de a,b,c elle n'est pas inversible

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -3 & b-2a \\ 0 & -6 & c-3a \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}a \\ 0 & -6 & c-3a \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 - 2L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}b + \frac{2}{3}a \\ 0 & 0 & c+a-2b \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$$

Cette matrice est inversible si et seulement si

$$c + a - 2b = 0$$

Ainsi, on obtient l'expression cartésienne de F suivante

$$\boxed{F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad a - 2b + c = 0 \right\}}$$

Question b

Notons $u = (2, 1, 3, 6)$ et $v = (-1, 2, 6, -3)$. La famille (u, v) est libre car u et v ne sont pas colinéaires. Pour tout $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on a donc $x \in F = \mathrm{Vect}(u, v)$ si et seulement si

$$\mathrm{rg} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & b \\ 3 & 6 & c \\ 6 & -3 & d \end{pmatrix}}_{=:A} = 2$$

Appliquons l'algorithme de Gauss (qui, rappelons-le, conserve le rang) sur A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 2 & -1 & a \\ 3 & 6 & c \\ 6 & -3 & d \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & -5 & a - 2b \\ 0 & 0 & c - 3b \\ 0 & -15 & d - 6b \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1, \quad L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ 0 & 0 & c - 3b \\ 0 & -15 & d - 6b \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5}a + \frac{2}{5}b \\ 0 & 0 & c - 3b \\ 0 & 0 & d - 3a \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 + 15L_2$$

Cette matrice est de rang 2 si et seulement si

$$\begin{cases} c - 3b & = & 0 \\ d - 3a & = & 0 \end{cases}$$

Ainsi, on obtient l'expression cartésienne de F suivante

$$\boxed{F = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \middle| \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c - 3b & = & 0 \\ d - 3a & = & 0 \end{array} \right. \right\}}$$