

# Algèbre 2 - CC1, Sujet 1

Alyce

10 mars 2023

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Question de cours</b>	<b>1</b>
1.1	Énoncé . . . . .	1
1.2	Réponse . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Exercice 1</b>	<b>2</b>
2.1	Énoncé . . . . .	2
2.2	Réponse . . . . .	3
2.2.1	Question a . . . . .	3
2.2.2	Question b . . . . .	3
2.2.3	Question c . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Exercice 2</b>	<b>5</b>
3.1	Énoncé . . . . .	5
3.2	Réponse . . . . .	5

# Chapitre 1

## Question de cours

### 1.1 Énoncé

Soient  $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Donner la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation  $A(\vec{x}) = \vec{b}$  ait des solutions  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

### 1.2 Réponse

Pour que l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  ait des solutions si et seulement si  $rg(A|\vec{b}) = rg(A)$ .

Càd la matrice étendue  $(A|\vec{b})$ , une fois triangularisée, n'admet aucune ligne de la forme :  $0\ 0\ 0\ \dots\ 0|c$  avec  $c \in \mathbb{R}^*$ .

## Chapitre 2

### Exercice 1

#### 2.1 Énoncé

Soit  $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$  et  $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$  tq :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Déterminer le déterminant de  $A$
- Déterminer l'inverse de la matrice  $A$
- Trouver la solution unique  $A\vec{x} = \vec{b}$

## 2.2 Réponse

### 2.2.1 Question a

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 - 6 - 2(3 - 6) + 6 - 8 \\ &= -2 + 6 - 2 \\ \det(A) &= 2\end{aligned}$$

### 2.2.2 Question b

Nous allons utiliser la méthode de la comatrice.

$$\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$${}^T\text{com}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)} \text{com}(A) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 2.2.3 Question c

$A$  inversible et  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Donc :  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet une unique solution  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

D'où :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Chapitre 3

### Exercice 2

#### 3.1 Énoncé

Soit  $P$  un plan tq  $P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y - z = -2 \right\}$ . Déterminez une équation paramétrique du plan  $P$ .

#### 3.2 Réponse

On va d'abord exprimer une des coordonnées en fonctions des autres, par exemple,  $z$ .

On a :  $z = 2x + 3y + 2$

On pose  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \end{cases}$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , d'où :  $z = 2\lambda + 3\mu + 2$

On pose  $p \in P$ , d'où :  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$