Université Claude Bernard Lyon 1 **L3 Mathématiques pour l'enseignement.**

Séries et intégrales

Lorenzo Brandolese

Bibliographie

1. Intégrales de Riemann. Pour une présentation plus détaillée on pourra consulter le `polycopié` de François De Marçay, « Intégrale de Riemann ».

1 Intégrales de Riemann

Dans ce chapitre nous développons la théorie de l'intégrale de Riemann d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$. Nous supposerons toujours implicitement que a, b sont deux nombres réels, avec $a < b$.

1.1 Continuité uniforme

Théorème 1.1 (Bolzano-Weierstrass). *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de l'intervalle $[a, b]$. Alors il existe une fonction strictement croissante $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ converge dans $[a, b]$.*

Dém. Voir le cours du semestre d'automne. □

Commençons par rappeler la notion de fonction continue.

Définition 1.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x \in I$ et $f\colon I \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue en x si :*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \textit{tel que}, \forall y \in I, \textit{ si } |x - y| < \delta, \textit{ alors } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Si f est continue en x, quel que soit $x \in I$, on dit que f est continue dans I.

Remarque 1.1. Rappelons que la continuité peut se caractériser à l'aide des suites :

i) Si f est continue en x, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ et $\alpha_n \to x$, alors $f(\alpha_n) \to f(x)$

ii) Réciproquement, s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I$ telle que $\alpha_n \to x$ et $f(\alpha_n) \not\to f(x)$, alors f est discontinue en x.

Exemple 1.2. La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, $x \mapsto \sin(1/x)$, ne peut se prolonger à une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{C}$. On dit que f est uniformément continue si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \textit{ tel que, si } x, y \in I \textit{ avec } |x - y| < \delta, \textit{ alors } |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Exercice 1.3. Démontrer que si $f\colon I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur I et que f' est bornée sur I, alors

$$\exists K > 0 \text{ tel que } |f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \tag{L}$$

(une fonction vérifiant la condition (L) est dite "lipschitzienne"). Conclure qu'une telle fonction est uniformément continue sur I.

Remarque 1.4. Attention à ne pas confondre la continuité uniforme avec la condition suivante, qui exprime seulement la continuité sur I :

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in I,\ \exists \delta > 0, \text{tel que, } \forall y \in I, \text{ si } |x-y| < \delta, \text{ alors } |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Remarque 1.5. En niant la définition de continuité uniforme on obtient le critère de « non-continuité uniforme » suivant : *s'il existe $\epsilon > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que*

$$|x_n - y_n| \to 0 \quad et \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon, \tag{NCU}$$

alors f n'est pas uniformément continue sur I.

On voit de cette manière, par exemple, que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue dans $\mathbb{R}$, bien qu'elle soit continue.

Théorème 1.2 (Heine)**.** *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle compact $[a,b]$, alors f est uniformément continue sur cet intervalle.*

Dém. Par l'absurde, si f n'est pas uniformément continue, alors la condition (NCU) s'applique. On applique le théorème de Bolzano-Weierstrass à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on trouve une suite extraite telle que $x_{\varphi(n)}$ converge. Mais alors $y_{\varphi(n)}$ converge aussi vers la même limite. Par la continuité, $f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \to 0$ ce qui contredit (NCU). □

Remarque 1.6. Il est important dans le théorème précédent que l'intervalle soit compact (=fermé et borné). Sur un intervalle non compact, comme par exemple $\mathbb{R}$ (non borné) ou $]0,1[$ (non fermé) on trouve facilement des fonctions continues, qui ne sont pas uniformément continues.

Exemple 1.7. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,1]$, bien qu'elle ne soit pas lipschitzienne.

1.2 Sommes de Darboux

Définition 1.3. *Une subdivision Δ d'un intervalle $[a,b]$ est une suite finie de réels $x_0, x_1, \dots x_n$ tels que*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Si Δ est une telle subdivision, on notera, pour $k = 1, \dots, n$:

$$I_k = [x_{k-1}, x_k], \qquad et \qquad |I_k| = x_k - x_{k-1}.$$

Définition 1.4 (Sommes de Darboux inférieure et supérieure)**.** *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction <u>bornée</u> et Δ une subdivision de $[a,b]$, on pose*

$$\Sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \inf_{I_k} f, \qquad et \qquad \Sigma^\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} |I_k| \sup_{I_k} f$$

Dans la définition précédente f peut être continue ou discontinue sur $[a,b]$. Pour les fonctions positives, géométriquement chacune des sommes de Darboux s'interprètent comme l'aire d'un « plurirectangle ». Lorsqu'il y a de nombreux points de subdivisions, $\Sigma_\Delta(f)$ et $\Sigma^\Delta(f)$ approchent, respectivement par dessous et par dessus, l'aire du sous-graphe de la fonction, c'est-à dire de l'ensemble

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Par exemple, si $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ est la fonction $f(x)=x^2$, pour la subdivision $\Delta=(0,\frac12,\frac23,1)$, on a $|I_1|=\frac12$, $|I_2|=\frac16$ et $|I_3|=\frac13$. Alors

$$\Sigma_\Delta(f)=\frac{1}{2}0+\frac{1}{6}\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\frac{4}{9}=\frac{31}{216}\qquad\text{et}\qquad\Sigma^\Delta(f)=\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\frac{4}{9}+\frac{1}{3}1=\frac{115}{216}.$$

Définition 1.5. *Si Δ et Δ' sont deux subdivisions d'un intervalle $[a,b]$, on dit que Δ' est plus fine que Δ si tous les points de la subdivision Δ sont aussi des points de la subdivision Δ'.*

Proposition 1.3. *(monotonie des subdivisions)*

i) Si Δ et Δ' sont deux subdivisions de $[a,b]$, avec Δ' plus fine que Δ, et $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ est bornée, on a

$$\Sigma_\Delta(f)\le\Sigma_{\Delta'}(f)\le\Sigma^{\Delta'}(f)\le\Sigma^\Delta(f).$$

ii) Si Δ_1 et Δ_2 sont deux subdivisions de $[a,b]$, alors

$$\Sigma_{\Delta_1}(f)\le\Sigma^{\Delta_2}(f).$$

Dém. i) Il suffit de considérer le cas où Δ' possède un seul point supplémentaire en plus que Δ. (En effet, si Δ' contient $k\ge2$ points supplémentaires, il suffit d'itérer k fois l'argument). Or, soit y ce point supplémentaire et soit k tel que

$$x_{k-1}<y<x_k.$$

La seule différence entre les sommes de Darboux inférieures $\Sigma_\Delta(f)$ et $\Sigma_{\Delta'}(f)$ est que le terme $|I_k|\inf\limits_{I_k} f$ de la première somme doit être remplacé par les deux termes

$$|y-x_{k-1}|\inf_{[x_{k-1},y]}\ +\ |y-x_{k-1}|\inf_{[y,x_k]} f$$

de la seconde. Les autres termes de $\Sigma_\Delta(f)$ et $\Sigma_{\Delta'}(f)$ sont les mêmes. Mais,

$$\begin{aligned}|I_k|\inf_{I_k} f&=(x_k-x_{k-1})\inf_{I_k} f\\&\le(y-x_{k-1})\inf_{I_k} f\ +\ (x_k-y)\inf_{I_k} f\\&\le(y-x_{k-1})\inf_{[x_{k-1},y]}\ +\ (y-x_{k-1})\inf_{[y,x_k]} f.\end{aligned}$$

Donc $\Sigma_\Delta(f)\le\Sigma_{\Delta'}(f)$. L'inégalité $\Sigma_{\Delta'}(f)\le\Sigma^{\Delta'}(f)$ est évidente.

L'inégalité $\Sigma^{\Delta'}(f)\le\Sigma^\Delta(f)$ se prouve de manière semblable.

ii) Posons $\Delta'=\Delta_1\cup\Delta_2$. Cette subdivision est plus fine que Δ_1 et Δ_2. D'après le point précédent,

$$\Sigma_{\Delta_1}(f)\le\Sigma_{\Delta'}(f)\le\Sigma^{\Delta'}(f)\le\Sigma^{\Delta_2}(f).$$

□

Pour une fonction bornée $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$, on introduit les nombres réels

$$I_*(f)\overset{\text{déf}}{=}\sup_\Delta\Sigma_\Delta(f),\qquad\text{et}\qquad I^*(f)\overset{\text{déf}}{=}\inf_\Delta\Sigma^\Delta(f),\tag{1.1}$$

où le supremum et l'infimum sont pris sur toutes les subdivisions possibles de $[a,b]$. Ces expressions sont bien définies (pourquoi ?) et on a toujours

$$-\infty<I_*(f)\le I^*(f)<+\infty.$$

Exemple 1.8. Considérons la fonction de Dirichlet $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, égale à 1 sur les rationnels et 0 sur les irrationnels de l'intervalle $[a,b]$ Si Δ est une subdivision arbitraire, et I_k est un intervalle de cette subdivision, alors $\inf_{I_k} \Phi = 0$ et $\sup_{I_k} \Phi = 1$. On voit alors que $\Sigma_\Delta(\Phi) = 0$ et $\Sigma^\Delta(\Phi) = b - a$. Pour la fonction de Dirichlet sur l'intervalle $[a,b]$, on a alors $I_*(\Phi) = 0$ et $I^*(\Phi) = b - a$.

1.3 Fonctions Riemann intégrables

Définition 1.6. *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si $I_*(f) = I^*(f)$. Dans ce cas, on écrit*

$$\int_a^b f = I_*(f) = I^*(f),$$

où $\int_a^b f$ est « l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ ».

Si f est à valeurs complexes, on dira qu'elle est Riemann-intégrable si ses parties réelles et imaginaires sont Riemann-intégrables. Dans ce cas, on pose $\int_a^b f = \mathrm{Re}(\int_a^b f) + i\,\mathrm{Im}(\int_a^b f)$.

Lorqu'il s'agit de calculer explicitement l'intégrale d'une fonction $x \mapsto f(x)$, il est souvent utile d'utiliser la notation alternative $\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour les fonctions Riemann-intégrables positives $\int_a^b f$ exprime géométriquement l'aire du sous-graphe de f sur $[a,b]$, c'est-à-dire de l'ensemble $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Pour les fonctions réelles qui changent de signe, $\int_a^b f$ exprime une « aire algébrique » (l'aire des portions négatives de la fonction est compté négativement).

Compatiblement avec cette interpretation, on pose, par définition,

$$\int_a^a f = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_b^a f = -\int_a^b f.$$

La fonction de Dirichlet est un exemple de fonction non Riemann-intégrable. Il n'est pas possible de calculer l'aire du sous-graphe de cette fonction avec la théorie de Riemann, mais il serait possible de le faire avec d'autres théories d'intégration.

Commençons par rappeler une caractérisation des bornes sup et inf qu'on utilisera dans la proposition suivante :

- Si $A \subset \mathbb{R}$ est majoré et $S \in \mathbb{R}$, on a

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, & a \leq S \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A\colon & S - \epsilon < a \end{cases}$$

- Si $A \subset \mathbb{R}$ est minoré $I \in \mathbb{R}$, on a

$$I = \inf A \iff \begin{cases} \forall a \in A, & I \leq a \\ \forall \epsilon > 0, \exists a \in A\colon & a < I + \epsilon. \end{cases}$$

Proposition 1.4 (Une c.n.s. d'intégrabilité)**.** *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de l'intervalle $[a,b]$ telle que*

$$0 \leq \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leq \epsilon.$$

Dans ce cas, on a

$$\Sigma^\Delta(f) - \epsilon \leq \int_a^b f \leq \Sigma_\Delta(f) + \epsilon$$

Dém. [1] Il s'agit de démontrer l'équivalence

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \Delta \text{ tel que } 0 \leq \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leq \epsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_*(f) = I^*(f)$$

Pour démonter l'implication $\Rightarrow$, on procède ainsi : pour $\epsilon > 0$, on considère une subdivision Δ telle que $0 \leq \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leq \epsilon$. Ensuite, par l'hypothèse,

$$I^*(f) \leq \Sigma^{\Delta}(f) \leq \Sigma_{\Delta}(f) + \epsilon \leq I_*(f) + \epsilon.$$

Mais $\epsilon > 0$ étant arbitraire, on a $I^*(f) \leq I_*(f)$, et donc $I^*(f) = I_*(f)$.

Pour démonter l'implication $\Leftarrow$, on pose $I(f) = I_*(f) = I^*(f)$ et on procède ainsi : pour $\epsilon > 0$, on choisit deux subdivisions Δ_1 et Δ_2 telles que

$$\begin{aligned} I(f) - \epsilon/2 < \Sigma_{\Delta_1}(f) \leq I(f) \qquad & \text{(propriété du sup)}, \\ I(f) \leq \Sigma^{\Delta_2}(f) < I(f) + \epsilon/2 \qquad & \text{(propriété de l'inf)}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la subdivision plus fine $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Grâce à la propriété de monotonie des subdivisions :

$$\begin{cases} I(f) - \epsilon/2 < \Sigma_{\Delta_1}(f) \leq \Sigma_{\Delta}(f) \\ \Sigma^{\Delta}(f) \leq \Sigma^{\Delta_2}(f) < I(f) + \epsilon/2. \end{cases}$$

En prenant la différence on trouve $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) < \epsilon$. L'encadrement de $\int_a^b f = I(f)$ en découle. □

1.4 Classes de fonctions Riemann-intégrables

Théorème 1.5. *Si $f \in C([a,b],\mathbb{C})$, alors f est Riemann-intégrable.*

Dém. On peut se ramener au cas d'une fonction réelle. Par le théorème de Weierstrass, f est bornée sur $[a,b]$. Par le theorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$.

Soit $\epsilon > 0$. La continuité uniforme de f garantit l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon/(b-a).$$

Choisissons une subdivision $\Delta = x_0, x_1, \dots x_n$ uniforme de $[a,b]$. Cela signifie que les points de la subdivision sont équidistants, et deux points consecutifs sont à une distance égale à $\delta' = (b-a)/n$. Nous choisissons n de manière que $\delta' < \delta$. Si I_k est un intervalle de cette subdivision, avec $k = 1, \dots, (b-a)/\delta'$, on a

$$|\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f| < \epsilon/(b-a).$$

Mais alors

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leq \sum_{k=1}^{n} \delta' \,|\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f| \leq \sum_{k=1}^{n} \delta \,\epsilon/(b-a) = \epsilon.$$

La proposion précédente implique que f est Riemann-intégrable. □

Théorème 1.6. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone et bornée, alors f est Riemann-intégrable.*

1. Non exigible à l'examen

Dém. [2] Traitons, par exemple, le cas d'une fonction croissante. Choisissons une subdivision $\Delta = x_0, x_1, \dots x_n$ uniforme de $[a, b]$, de pas $\delta = (b-a)/n$. L'entier n sera choisi après. Les intervalles de la subdivision sont alors de la forme

$$I_k = [a + (k-1)\delta, a + k\delta], \quad k = 1, \dots, n.$$

On a,

$$\begin{aligned} \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) &= \sum_{k=1}^{n} \delta(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f) \\ &\leq \dots (\text{détailler}) \dots \\ &\leq \delta(f(b) - f(a)) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

La dernière égalité ést vraie lorsque l'on choisi n tel que $(b-a)(f(b)-f(a))/n \leq \epsilon$. □

Remarque 1.9. Le résultat précédent se généralise aux fonctions bornées et continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b]$ (exercice). Par définition une fonction continue par morceaux est une fonction ayant un nombre fini de points de discontinuités. L'intégrale d'une telle fonction se calcule comme la somme des intégrales sur les sous-intervalles où la fonction est continue au moins à l'intérieur de ces intervalles.

1.5 Propriétés de l'intégrales

Les propriétés basiques de l'intégrales de Riemann sont les suivantes. Les deux premières propriétés traduisent le fait que l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur un intervalle $[a, b]$ est un espace vectoriel, et la linéarité de l'intégrale.

Théorème 1.7. *Soient $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ et $g\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ deux fonctions Riemann-intégrables.*

i) $f + g$ est Riemann-intégrable et $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

ii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

iii) Si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

iv) (Règle de Chasles) Pour tout $c \in]a, b[$, f est Riemann-intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$. De plus,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Dém. [3] Soit $\epsilon > 0$. Il existe une subdivision Δ_1 telle que

$$\Sigma^{\Delta_1}(f) - \epsilon \leq \int_a^b f \leq \Sigma_{\Delta_1}(f) + \epsilon$$

et une subdivision Δ_2 telle que

$$\Sigma^{\Delta_2}(g) - \epsilon \leq \int_a^b g \leq \Sigma_{\Delta_2}(g) + \epsilon$$

2. Non exigible à l'examen
3. Non exigible à l'examen

Considérons la subdivision $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Grâce à la propriété de monotonie des subdivisiosn, on a

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \epsilon \leq \int_a^b f \leq \Sigma_{\Delta}(f) + \epsilon$$

et

$$\Sigma^{\Delta}(g) - \epsilon \leq \int_a^b g \leq \Sigma_{\Delta}(g) + \epsilon.$$

En sommant terme à terme ces inégalités

$$\Sigma^{\Delta}(f) + \Sigma^{\Delta}(g) - 2\epsilon \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \Sigma_{\Delta}(f) + \Sigma_{\Delta}(g) + 2\epsilon$$

Mais,

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Delta}(f) + \Sigma_{\Delta}(g) &= \sum_{k=1}^{n} |I_k| \Big(\inf_{I_k}(f) + \inf_{I_k}(g) \Big). \leq \Sigma_{\Delta}(f+g) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |I_k| \inf_{I_k}(f+g) \\ &= \Sigma_{\Delta}(f+g)\end{aligned}$$

De même, par les propriétés du sup,

$$\Sigma^{\Delta}(f+g) \leq \Sigma^{\Delta}(f) + \Sigma^{\Delta}(g).$$

Ceci donne finalement,

$$\Sigma^{\Delta}(f+g) - 2\epsilon \leq \int_a^b f + \int_a^b g \leq \Sigma_{\Delta}(f+g) + 2\epsilon$$

et donc l'intégrabilité de $f+g$, ainsi que la formule cherchée.

Exercice : démontrer les autres assertions. □

Théorème 1.8. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et si $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue. Alors la fonction composée $\phi \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann intégrable sur $[a,b]$.*

Dém. [4] Soit $\epsilon > 0$. Il s'agit de trouver une constante $c > 0$ et une subdivision Δ telles que

$$\Sigma^{\Delta}(\phi \circ f) - \Sigma_{\Delta}(\phi \circ f) \leq c\epsilon. \tag{1.2}$$

Comme f est bornée, il existe $M > 0$ telle que

$$\forall x \in [a,b]\colon \quad |f(x)| \leq M.$$

D'après le théorème de Heine, ϕ est uniformément continue sur l'intervalle $[-M, M]$. Donc

$$\exists \delta > 0 \text{ t.q. si } \; y, y \in [-M, M] \text{ et } |y - y'| \leq \delta, \text{ alors } |\phi(y) - \phi(y')| \leq \epsilon.$$

4. Non exigible à l'examen

Grâce à l'intégrabilité de f, il existe une subdivision Δ de $[a,b]$ telle que

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) < \delta^2.$$

Si l'on note comme d'habitude I_k ($k = 1, \ldots, n$) les intervalles de cette subdivision, on a

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(\phi\circ f) - \Sigma_\Delta(\phi\circ f) &= \sum_{k=1}^{n} |I_k|\Big(\sup_{I_k}(\phi\circ f) - \inf_{I_k}(\phi\circ f)\Big) \\ &= \sum_{k\in A} |I_k|\Big(\sup_{I_k}(\phi\circ f) - \inf_{I_k}(\phi\circ f)\Big) + \sum_{k\in B} |I_k|\Big(\sup_{I_k}(\phi\circ f) - \inf_{I_k}(\phi\circ f)\Big).\end{aligned} \tag{1.3}$$

Ici,

$$A \overset{\text{déf}}{=} \Big\{k \in \{1,\ldots,n\} \colon \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \le \delta\Big\}.$$
$$B \overset{\text{déf}}{=} \Big\{k \in \{1,\ldots,n\} \colon \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f > \delta\Big\}.$$

Observons que :

$$\begin{aligned}k\in A \text{ et } x\in I_k &\Rightarrow \text{la variation de } f \text{ sur } I_k \text{ est } \le \delta. \\ &\Rightarrow \text{la variation de } \phi\circ f \text{ sur } I_k \text{ est } \le \epsilon \quad \text{(par continuité uniforme)} \\ &\Rightarrow |I_k|\Big(\sup_{I_k}(\phi\circ f) - \inf_{I_k}(\phi\circ f)\Big) \le |I_k|\epsilon \\ &\Rightarrow \boxed{\sum_{k\in A} |I_k|\Big(\sup_{I_k}(\phi\circ f) - \inf_{I_k}(\phi\circ f)\Big) \le (b-a)\epsilon}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}k\in B \Rightarrow \delta < \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \Rightarrow \qquad \sum_{k\in B}\delta|I_k| &\le \sum_{k\in B}|I_k|\Big(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\Big) \\ &\le \sum_{k=1}^{n}|I_k|\Big(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\Big) \\ &= \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \le \delta^2.\end{aligned}$$

Donc, en divisant par δ, et en posant $C = \sup_{x\in[a,b]} |\phi\circ f(x)|$,

$$\begin{aligned}k\in B &\Rightarrow \sum_{k\in B}|I_k| \le \delta \\ &\Rightarrow \boxed{\sum_{k\in B} |I_k|\Big(\sup_{I_k}(\phi\circ f) - \inf_{I_k}(\phi\circ f)\Big) \le 2C\delta}\end{aligned}$$

Reprenons le calcul interrompu dans (1.3) : en utilisant les deux estimations dans les encadrés, on trouve

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(\phi\circ f) - \Sigma_\Delta(\phi\circ f) &\le (b-a)\epsilon + 2C\delta \\ &\le [(b-a)+2C]\epsilon \qquad \text{(choisir } \delta < \epsilon \text{ dans la continuité uniforme)} \\ &= c\epsilon,\end{aligned}$$

avec $c = (b-a) + 2C$. $\square$

Corollaire 1.9. *Si f et g sont deux fonctions bornées Riemann-intégrables sur $[a,b]$, alors leur produit $fg\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est aussi Riemann-intégrable.*

Dém. En effet,

$$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}.$$

Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente à la fonction $\phi(x) = x^2$ et le fait que l'enseble des fonctions Riemann-intégrables est un espace vectoriel. □

Exercice 1.10. Montrer qu'en général $\int_a^b fg \neq (\int_a^b f)(\int_a^b g)$.

Corollaire 1.10. *Si f est bornée et Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors $|f|$ l'est aussi, et*

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b |f|.$$

Dém. En effet, la proposition précédente s'applique avec $\phi(x) = |x|$. De plus

$$-|f| \leq f \leq |f| \;\Rightarrow\; -\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

et ceci donne l'inégalité cherchée. □

Théorème 1.11 (Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale)**.** *Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, alors*

$$\Big|\int_a^b fg\Big| \leq \Big(\int_a^b f^2\Big)^{1/2}\Big(\int_a^b g^2\Big)^{1/2}.$$

Dém. En effet, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \int_a^b (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2.$$

(Observer que les quatres fonctions $\lambda f + g$, f^2, fg et g^2 sont toutes intégrables d'après les résultats précédents). Le discriminant $\triangle$ du polynôme quadratique (en la variable λ) est donc négatif. et l'inégalité $\triangle \leq 0$ donne le résultat cherché. □

1.6 Intégrales de Riemann et primitives.

Définition 1.7 (primitive)**.** *Une primitive d'une fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $[a,b]$, telle que $F' = f$.*

Théorème 1.12. *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Posons, pour $x \in [a,b]$,*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

- *Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, alors la fonction $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est bien définie et lipschitzienne sur $[a,b]$.*

- *Si f est continue sur $[a,b]$ alors F est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$. En particulier, toute fonction continue sur un intervalle possède une primitive.*

Dém. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $x \in [a,b]$, alors f est aussi Riemann-intégrable sur $[a,x]$. En effet, si $\epsilon > 0$ il existe une subdivision Δ telle que $\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) < \epsilon$. Quitte à raffiner Δ, on peut supposer que Δ contient x. Mais alors $\Sigma^\Delta(f|_{[a,x]}) - \Sigma_\Delta(f|_{[a,x]}) < \epsilon$. Donc $F(x)$ est bien définie.

Soit $x, x' \in [a,b]$ et $M = \sup_{[a,b]} |f|$. Alors

$$\begin{aligned} |F(x') - F(x)| &= \Big| \int_a^{x'} f - \int_a^x f \Big| = \Big| \int_x^{x'} f \Big| \\ &\leq M|x' - x| \end{aligned}$$

et f est M-Lipschitzienne.

Soit $\epsilon > 0$. Si f est continue sur $[a,b]$ et $x_0 \in [a,b]$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Mais alors, si $0 < h < \delta$

$$\begin{aligned} \Big| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \Big| &= \Big| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \big(f - f(x_0)\big) \Big| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f - f(x_0)| \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

En prenant $h \to 0+$ on voit alors que $F'(x_0+) = f(x_0)$. On prouve de la même manière que $F'(x_0-) = f(x_0)$, donc F est dérivable et $F' = f$. □

Théorème 1.13 (Théorème fondamental du calcul différentiel)**.** *Si $F \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a,b]$ et $f = F'$ est Riemann-intégrable, alors*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Dém. Soit $\Delta = x_0, x_1, \ldots, x_n$ une subdivision arbitraire de $[a,b]$, et $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, appliqué à la fonction dérivable F sur l'intervalle I_k, il existe $c_k \in I_k$ tel que

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n \big[F(x_k) - F(x_{k-1})\big] = \sum_{k=1}^n |I_k| f(c_k).$$

Comme $\inf_{I_k} \leq f(c_k) \leq \sup_{I_k} f$, on trouve

$$\Sigma_\Delta(f) \leq F(b) - F(a) \leq \Sigma^\Delta(f).$$

Mais f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Si on passe au sup sur Δ dans l'inégalité de gauche on trouve $\int_a^b f \leq F(b) - F(a)$. Si on passe à l'inf sur Δ dans l'inégalité de droite on trouve $F(b) - F(a) \leq \int_a^b f$. □

1.7 Méthodes de calculs d'intégrales

Lorsqu'il s'agit de calculer explicitement l'intégrale d'une fonction $x \mapsto f(x)$, il est souvent pratique d'effectuer les calculs en utilisant la notation

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{\text{déf}}{=} \int_a^b f.$$

Le nom de la variable n'a pas d'importance et on peut remplacer la lettre x par une autre. On a, par exemple, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 1.14 (Intégration par parties)**.** *Si f et g sont deux fonctions dérivables sur $[a,b]$ et si f' et g' sont bornées*[5] *et Riemann-intégrables, alors*

$$\int_a^b fg' = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'g.$$

Dém. Exercice. □

Théorème 1.15 (changement de variable)**.** *Soit $\phi\colon [a,b] \to [c,d]$ de classe C^1 et $f\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ continue. Alors,*

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dém. En effet, f possède une primitive F. Alors $x \mapsto F(\phi(x))$ est une primitive de $x \mapsto f(\phi(x)\phi'(x)$. On voit alors, grâce au théorème fondamental du calcul différentiel, que les deux termes de l'égalité sont égales à $F(\phi(b)) - F(\phi(a))$. □

Dans la pratique, pour calculer $\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t$, on peut chercher une fonction ϕ comme ci-dessus et qui est en plus bijective, et considérer l'application inverse $\phi^{-1}\colon [c,d] \to [a,b]$. La formule de changement de variable revient alors à poser :

$$t = \phi(x), \quad \mathrm{d}t = \phi'(x)\,\mathrm{d}x, \quad \begin{cases} t = c \iff x = \phi^{-1}(c) \\ t = d \iff x = \phi^{-1}(d) \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.8 Sommes de Riemann

Définition 1.8. *Une subdivision pointée $\Delta^\bullet$ d'un intervalle $[a,b]$ est une subdivision $\Delta = x_0, x_1, \ldots, x_n$ munie d'une suite finie de points $\xi_1, \ldots, \xi_n$, telle que*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad \text{et} \qquad \xi_k \in I_k \stackrel{\text{déf}}{=} [x_{k-1}, x_k] \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n.$$

Le pas de cette subdivision est

$$\mathrm{pas}(\Delta^\bullet) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathrm{pas}(\Delta) = \max_{k=1,\ldots,n} |I_k|.$$

5. Il y a des fonction dérivables sur un intervalles $[a,b]$ mais de dérivée non bornée. Par exemple, la fonction $f(x) = x^{3/2}\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et telle que $f(0) = 0$ est dérivable sur $[-1,1]$, avec $f'(0) = 0$, mais f' n'est pas bornée au voisinage de 0.

Définition 1.9. *Si $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ est une fonction bornée, et $\Delta^\bullet$ est une subdivision pointée de $[a,b]$ comme ci-dessus, la somme de Riemann associée à f et à $\Delta^\bullet$ est*

$$R(f,\Delta^\bullet)=\sum_{k=1}^{n}|I_k|\,f(\xi_k).$$

Comme les sommes de Darboux, une somme de Riemann s'interprète comme l'aire d'un pluri-rectangle. Bien entendu, à toute subdivision pointée $\Delta^\bullet$ on peut associer la subdivision non-pointée Δ correspondante : on a alors

$$\Sigma_\Delta(f)\le R(f,\Delta^\bullet)\le\Sigma^\Delta(f).$$

Le théorème suivant illustre l'équivalence entre notre définition d'intégrabilité et la notion d'intégrabilité historiquement introduite par B. Riemann, qui repose sur l'existence de la limite des sommes de Riemann, lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro.

Définition 1.10. *Soit $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ et soit $\ell\in\mathbb{C}$. L'écriture*

$$\lim_{\mathrm{pas}(\Delta)\to 0} R(f,\Delta^\bullet)=\ell$$

signifie que $\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0$ *tel que, pour toute subdivision pointée $\Delta^\bullet$ de $[a,b]$:*

$$\mathrm{pas}(\Delta)<\delta\ \Rightarrow\ |R(f,\Delta^\bullet)-\ell|<\epsilon. \qquad (\star)$$

Théorème 1.16. *Une fonction bornée $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ est Riemann intégrable si et seulement si la limite* $\lim_{\mathrm{pas}(\Delta)\to 0}R(f,\Delta^\bullet)$ *existe. Dans ce cas,*

$$\lim_{\mathrm{pas}(\Delta)\to 0} R(f,\Delta^\bullet)=\int_a^b f.$$

Dém. [6] On peut se ramener aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ en prenant la partie réelle et imaginaire.

Supposons que f soit Riemann intégrable (au sens des sommes de Darboux). Soit $\epsilon>0$. Il s'agit de trouver $\delta>0$ vérifiant $(\star)$. Pour cela, posons $M=\sup_{[a,b]}|f|$. Par l'hypothèse, on sait qu'il existe une subdivision $\nabla=x_0,\dots,x_n$ telle que

$$\Sigma^\nabla(f)-\epsilon\le\int_a^b f\le\Sigma_\nabla(f)+\epsilon.$$

Notons, comme d'habitude, $|I_k|=x_k-x_{k-1}$. Démontrons que, si on choisit

$$0<\delta<\min\Big(\frac{\epsilon}{2(n+1)\,M},\min_{k=1,\dots,n}|I_k|\Big),$$

alors la condition $(*)$ est satisfaite.

Soit $\Delta^\bullet$ une subdivision pointée telle que $\mathrm{pas}(\Delta)<\delta$. Le choix de δ implique que tous les intervalles I_k de la subdivision de départ ∇ contiennent au moins un point de la nouvelle

6. Non exigible à l'examen

subdivision Δ. Observons que (faire un dessin pour comprendre la deuxième inégalité [7])

$$\begin{aligned}R(f, \Delta^\bullet) &\leq \Sigma^\Delta(f)\\ &\leq M\delta(n+1) + \Sigma^\nabla(f)\\ &\leq \int_a^b f + 2\epsilon.\end{aligned}$$

Un calcul semblable donne

$$\int_a^b f - 2\epsilon \leq R(f, \Delta^\bullet).$$

Ceci prouve la condition cherchée $(\star)$.

Réciproquement, supposons que

$$\lim_{\mathrm{pas}(\Delta)\to 0} R(f, \Delta^\bullet) = \ell.$$

Soit $\epsilon > 0$. Par l'hypothèse, nous pouvons trouver $\delta > 0$ et une subdivision $\Delta = x_0, x_1, \ldots, x_n$, de pas inférieure à δ, telle que, pour n'importe quel « pointage » $\xi_1, \ldots, \xi_n$ de cette subdivision, on a

$$\left|\sum_{k=1}^n |I_k|\, f(\xi_k) - \ell\right| < \epsilon.$$

Prenons ξ_k tel que $f(\xi_k) \approx \sup_{I_k} f$ (l'egalité $f(\xi_k) = \sup_{I_k} f$ est possible si le sup de f est atteint sur I_k, mais ce n'est pas toujours le cas). Un choix qui convient est de prendre ξ_k tel que

$$\sup_{I_k} f - \epsilon/(b-a) \leq f(\xi_k)$$

(ce qui est toujours possible par la propriété du sup). Ainsi,

$$\Sigma^\Delta(f) = \sum_{k=1}^n |I_k| \sup_{I_k} f \leq \sum_{k=1}^n |I_k| f(\xi_k) + \epsilon \leq \ell + 2\epsilon.$$

Avec un raisonnement semblable (en choisissant d'autres points ξ_k tels que $f(\xi_k) \approx \inf_{I_k} f$), on trouve

$$\ell - 2\epsilon \leq \Sigma_\Delta(f).$$

En conclusion, nous avons trouvé une subdivision telle que

$$\Sigma^\Delta(f) - 2\epsilon \leq \ell \leq \Sigma_\Delta(f) + 2\epsilon.$$

Ceci implique la Riemann-intégrabilité de f et que $\int_a^b f = \ell$.

□

Le corollaire suivant s'obtient en reconnaissant l'expression des sommes de Riemann dans le cas d'une subdivision uniforme, $x_k = a + (b-a)/n$, avec un pointage aux points $\xi_k = x_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

7. Ici, chaque terme de $\Sigma^\Delta(f)$ exprime l'aire d'un rectangle étroit, de base $\leq \delta$. On distingue alors les rectangles étroits dont la base contiennent les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (dont chacun a une aire majoré par $M\delta$), des rectangles étroits dont la base est contenue dans un intervalle de type I_k. Le premiers ont une somme des aires majoré par $M\delta(n+1)$. Les autres ont une somme des aires majoré par $\Sigma^\nabla(f)$.

Corollaire 1.17. *Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée Riemann-intégrable su $[a,b]$, alors*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k(b-a)/n) \to \int_a^b f.$$

Remarque 1.11 (Le cas des fonctions vectorielles)**.** Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^d$ on dira que f est Riemann-intégrable si et seulement si les composantes de f le sont. Dans ce cas on pose $\int_a^b f = (\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n)$. Soit $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une norme (pas forcement la norme euclidienne). Une conséquence de l'inégalité triangulaire est que

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}^d, \qquad \Big| \|x\| - \|x'\| \Big| \le \|x - x'\|$$

et cette inégalité affirme que l'application $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est lipshitzienne, et donc continue. Mais alors, si f est intégrable, la fonction $\|f\|$ l'est aussi d'après le théorème 1.8. Dans ce cas on a

$$\Big\| \int_a^b f \Big\| \le \int_a^b \|f\| \qquad \text{(inégalité de Bochner).}$$

En effet, pour toute subdivision pointée $\Delta^\bullet$, avec les notations usuelles,

$$\|R(f, \Delta^\bullet)\| = \Big\| \sum_{k=1}^{n} |I_k| f(\xi_k) \Big\| \le \sum_{k=1}^{n} |I_k| \; \|f(\xi_k)\| \le \int_a^b \|f\|.$$

En prenant pas$(\Delta) \to 0$ on obtient l'inégalité de Bochner.

1.9 Suites de fonctions uniformément convergentes

Définition 1.11. *Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ des fonctions bornées et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f dans D si :*

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \textit{tel que,} \quad \forall n \ge n_0, \quad \forall x \in D, \quad |f_n(x) - f(x)| \le \epsilon.$$

Autrement dit,

$$\|f_n - f\|_\infty \overset{\text{déf}}{=} \sup_D |f_n - f| \;\longrightarrow 0.$$

On vérifie immédiatement que, dans ce cas,

1. $f\colon D \to \mathbb{R}$ est bornée.
2. Pour tout $n \ge n_0$, on a

$$\Big| \inf_D f_n - \inf_D f \Big| \le \epsilon \qquad \text{et} \qquad \Big| \sup_D f_n - \sup_D f \Big| \le \epsilon,$$

et que donc

$$\inf_D f_n \to \inf_D f \qquad \text{et} \qquad \sup_D f_n \to \sup_D f.$$

Théorème 1.18. *Toute fonction $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ qui est limite uniforme d'une suite de fonctions bornées et Riemann-intégrables sur $[a,b]$ est elle même Riemann intégrable sur $[a,b]$. De plus,*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Dém. [8] Soit $\epsilon > 0$. Il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall x \in [a,b]\colon \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}.$$

Mais alors, pour toute subdivision Δ de $[a,b]$, on a, pour tout $n \geq n_0$,

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \epsilon \leq \Sigma_\Delta(f) \leq \Sigma^\Delta(f) \leq \Sigma^\Delta(f_n) + \epsilon.$$

Grâce à l'intégrabilité de f_n, il existe une subdivision Δ telle que

$$0 \leq \Sigma^\Delta(f_n) - \Sigma_\Delta(f_n) \leq \epsilon.$$

Mais alors,

$$0 \leq \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leq 2\epsilon,$$

ce qui montre l'intégrabilité de f. De plus, pour $n \geq n_0$,

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \epsilon.$$

Donc, $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. □

Définition 1.12 (convergence simple)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $(n = 0,1,2,\ldots)$ et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f dans D si :*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in D, \quad \exists n_0 \quad \textit{tel que}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D \qquad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Cette notion signifie de convergence est bien moins contraignante que la notion de convergence uniforme. Par exemple, la suite de fonction $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f_n(x) = x^n$ converge simplement vers la fonction $f(x) = 0$ si $0 \leq x < 1$ et telle que $f(1) = 1$, mais pas uniformément.

Remarque 1.12. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est la limite simple d'une suite de fonctions f_n Riemann intégrables, ça peut arriver que f ne soit pas Riemann-intégrable. Par voir un exemple, considérons une énumération $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tous les rationnels contenus dans $\mathbb{Q} \cap [a,b]$. [9] Posons

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{q_0,\ldots,q_n\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Observons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable dans $[a,b]$ (puisqu'elle possède un nombre fini de discontinuités) d'intégrale nulle. De plus la suite (f_n) converge simplement vers la fonction de Dirichlet sur $[a,b]$, qui n'est pas Riemann-intégrable.

Remarque 1.13. Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est la limite simple d'une suite de fonctions f_n Riemann intégrables, même si l'on suppose que f est Riemann-intégrable, ça peut arriver que $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n \neq \int_a^b f$.

8. Non exigible à l'examen
9. Il suffit de savoir que $\mathbb{Q} \cap [a,b]$ est dénombrable, ce qui implique qu'il existe une bijection $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [a,b]$ et de poser $q_n = \psi(n)$.

1.10 Riemann-intégrabilité et points de discontinuité [10]

Définition 1.13 (Oscillation sur un intervalle)**.** *Soit $f\colon I\to\mathbb{R}$. L'oscillation de f sur l'intervalle I est*

$$\operatorname*{Osc}_I(f)=\sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)|=\sup_I(f)-\inf_I(f).$$

La dernière égalité de la définition se justifie ainsi :

- "$\le$" : $\forall x,y\in I$ on a $f(x)-f(y)\le \sup_I f-\inf_I f$. Après en échangeant x et y on trouve l'inégalité cherchée.
- "$\ge$" : Soit $\epsilon>0$. Par les propriétés de sup et inf, il existe $x,y\in I$ tels que

$$\sup_I f-\inf_I f\le f(x)+\epsilon-(f(y)-\epsilon)\le |f(x)-f(y)|+2\epsilon.$$

et on conclut.

Définition 1.14 (Oscillation en un point)**.** *Soit f définie au voisinage de x_0. On pose*

$$\operatorname*{Osc}_{x_0}(f)=\lim_{r\to 0+}\operatorname*{Osc}_{[x_0-r,x_0+r]}(f).$$

La définion précédente a bien un sens, puisque la limite pour $r\to 0+$ existe toujours. En effet, la fonction $r\mapsto \operatorname{Osc}_{[x_0-r,x_0+r]}(f)$ est décroissante.

Remarque 1.14.

- f est continue en x_0 si et seulement si $\operatorname{Osc}_{x_0}(f)=0$.
- Si x_0 est une discontinuité de première espèce, alors $\operatorname{Osc}_{x_0}(f)$ est le saut de la fonction f en x_0 (la valeur absolue de la différence entre la limite à droite et la limite à gauche en x_0).
- Si $f(x)=\sin(1/x)$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$, alors $\operatorname{Osc}_0(f)=2$.
- Si $f(x)=1/x$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$ alors $\operatorname{Osc}_0(f)=+\infty$.

Observons que, si $f\colon I\to\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Disc}(f)=\{x\in I\colon f \text{ est discontinue en } x\}=\bigcup_{\epsilon>0}\{x\colon \operatorname*{Osc}_x(f)\ge\epsilon\}$$

Lemme 1.19. *Soit $\epsilon>0$ et $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. L'ensemble $D_\epsilon=\{x\in[a,b]\colon \operatorname{Osc}_x(f)\ge\epsilon\}$ est fermé dans $[a,b]$*

Dém. Soit $(x_n)\subset D_\epsilon$ et $x\in[a,b]$, tels que $x_n\to x$. Montrons que $x\in D_\epsilon$.

En effet, soit $0<\eta<\epsilon$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, grâce au fait que $\operatorname{Osc}_{x_n}(f)\ge\epsilon$ on trouve $y_n,z_n\in[a,b]$ tel que

$$|x_n-y_n|\le 1/n,\quad |x_n-z_n|\le 1/n\quad \text{ et }\quad |f(y_n)-f(z_n)|\ge\epsilon-\eta.$$

Mais alors $y_n\to x$, $z_n\to x$ et donc $\operatorname{Osc}_x(f)\ge\epsilon-\eta$. Comme η est arbitraire, on trouve $\operatorname{Osc}_x(f)\ge\epsilon$. □

Définition 1.15. *Soit $E\subset\mathbb{R}$. On dit que E est de mesure nulle (ou « négligeable »), si pour tout $\epsilon>0$, il existe une suite finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (I_n) telle que $E\subset\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$ et telle que*

$$\sum_n |I_n|\le\epsilon.$$

On écrit dans ce cas $\mu(E)=0$.

10. Dans cette section, seul l'énoncé du théorème de Lebesgue est exigible à l'examen

Remarque 1.15. Tout ensemble $E \subset \mathbb{R}$ fini ou dénombrable est de mesure nulle. En effet, si $E = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\epsilon > 0$, alors on peut recouvrir E par des intervalles I_n centrés en x_n et de longueur $\epsilon/2^{n+1}$. Ainsi, $\sum_n |I_n| \le \epsilon$.

On voit de la même manière (exercice) que la réunion au plus dénombrable d'ensembles de mesure nulle est un ensemble de mesure nulle.

Remarque 1.16. On peut construire des ensembles non dénombrables de mesure nulle. Par exemple, l'ensemble triadique de Cantor. (Chercher sur le web pour en savoir plus).

Rappelons qu'un compact K de $\mathbb{R}$ (ou plus en général de tout espace métrique) vérifie la propriété de Borel–Lebesgue suivante : si K est contenu dans une réunion, finie ou infinie, d'ouverts, alors K est contenu dans une réunion finie de ces ouverts. La réciproque est vraie aussi : un ensemble $K \subset \mathbb{R}$ vérifiant la propriété de Borel–Lebesgue est nécessairement compact. Autrement dit :

Théorème 1.20 (Borel–Lebesgue)**.** *Un ensemble K est compact si et seulement si, de tout recouvrement ouvert de K on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Cette propriété joue un rôle important dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 1.21 (de Lebesgue)**.** *Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble des ses points de discontinuité est de mesure nulle.*

Dém. "Seulement si". Supposons que f soit Riemann-intégrable. Démontrons que $\mathrm{Disc}(f)$ est de mesure nulle. On a,

$$\mathrm{Disc}(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \{x\colon \operatorname*{Osc}_x(f) \ge 1/n\} \overset{\text{déf}}{=} \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} D_{1/m}$$

Donc, il suffit de démontrer que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $D_{1/m}$ est de mesure nulle.

Soit donc $\epsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une subdivision $\Delta = x_0, x_1, \dots x_n$ de $[a,b]$ telle que

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \le \epsilon/m.$$

Notons I_k les intervalles de cette subdivision.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon}{m} &\ge \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \\
&\ge \sum_{k=1}^{n} |I_k| \Big(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\Big) \\
&\ge \sum_{k\in A} |I_k| \Big(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\Big) \\
&\ge \sum_{k\in A} |I_k| \, \frac{1}{m},
\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$A \overset{\text{déf}}{=} \big\{k \in \{1,\dots,n\}\colon I_k \text{ contient un point } x \text{ tel que } \operatorname*{Osc}_x(f) \ge 1/m\big\}.$$

Et donc

$$\sum_{k\in A} |I_k| \leq \epsilon.$$

Or, les intervalles $(I_k)_{k\in A}$ recouvrent l'ensemble $D_{1/m}$, qui est alors de mesure nulle [11].

"Si". Réciproquement, supposons que l'ensemble des points de discontinuité de f soit de mesure nulle et démontrons que f est Riemann-intégrable. Soit $\epsilon > 0$. On cherche une subdivision Δ et une constante $c > 0$ telle que

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leq c\epsilon.$$

L'ensemble $D_\epsilon = \{x \in [a,b] \colon \operatorname{Osc}_x(f) \geq \epsilon\}$ est un compact (puisque fermé, grâce au lemme précédent, et borné) de mesure nulle. On peut alors trouver une suite finie d'intervalles ouverts $I_1, \ldots, I_N$, tels que

$$D_\epsilon \subset I_1 \cup \ldots \cup I_N, \qquad |I_1| + \cdots + |I_N| \leq \epsilon.$$

(une telle suite d'intervalles serait a priori dénombrable, mais la compacité permet d'en extraire un sous-recrouvrement fini, par la propriété de Borel–Lebesgue).

Posons,

$$K \overset{\text{déf}}{=} [a,b] \backslash (I_1 \cup \ldots \cup I_N).$$

Observons que

$$z \in K \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{Osc}_z(f) < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \exists J_z \text{ intervalle ouvert dans } [a,b], \text{ tel que } \operatorname*{Osc}_{J_z}(f) < \epsilon.$$

Mais

$$K \subset \bigcup_{z\in K} J_z$$

et K est compact (puisque les intervalles $I_1, \ldots I_N$ sont ouverts et donc K est fermé et borné). On peut alors trouver un ensemble fini $F \subset K \subset [a,b]$ tel que

$$K \subset \bigcup_{z\in F} J_z.$$

Nous avons donc une collection finie d'intervalles de type J_z ou de type I_k. Ces intervalles peuvent se chevaucher. Nous pouvons alors construire une subdivision Δ, en prenant les points d'extrémité de tous ces intervalles.

Calculons

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) = \sum_{I' \text{ intervalle de } \Delta} |I'| \Big(\sup_{I'} f - \inf_{I'} f\Big).$$

Tout intervalle I' de la subdivision Δ est contenu dans un intervalle de type J_z, ou, sinon, dans un intervalle de type I_k. Ceci conduit à séparer en deux la somme précédente.

Mais,

$$\Big(I' \subset \text{ dans un intervalle de type } J_z\Big) \;\Rightarrow\; \Big(\sup_{I'} f - \inf_{I'} f\Big) \leq \epsilon.$$

11. Dans la définition d'ensemble de mesure nulle, nous avons demandé que les intervalles recouvrant l'ensemble soient ouverts. Les intervalles I_k ne sont pas ouverts, mais la conclusion reste vraie puisqu'on peut les remplacer par des intervalles ouverts un peu plus grands, par exemple de longueur double.

Donc,

$$\begin{aligned}
\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) &= \sum_{I' \text{ intervalle de } \Delta} |I'| \Big(\sup_{I'} f - \inf_{I'} f \Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{N} |I_k| \Big(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \Big) + \sum_{I' \text{ intervalle de } \Delta} |I'| \, \epsilon \\
&\leq 2M \sum_{k=1}^{N} |I_k| + \epsilon(b-a) \\
&\leq (2M + (b-a))\epsilon.
\end{aligned}$$

Ici nous avons posé $M = \sup_{[a,b]} |f|$. Donc $c = 2M + b - a$ convient. $\square$

2 Suites et séries de fonctions

2.1 Espaces de Banach

Rappelons la notion suivante :

Définition 2.1. *Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une norme sur E est une application $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*
i) $\forall x \in E\colon \|x\| \geq 0$. *De plus* $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0_E$.
ii) $\forall x \in E$ *et tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*, si l'espace vectoriel est complexe),* $\|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|$
iii) $\forall x, y \in E\colon \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
On dit dans ce cas que $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace vectoriel normé et ses éléments sont appelés « points » ou « vecteurs ».*

Définition 2.2. *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'un espace normé* $(E, \|\cdot\|)$ *converge dans* E*, si et seulement s'il existe* $x \in E$ *tel que* $\|x_n - x\| \to 0$. *Dans ce cas, on écrit* $x_n \to x$.

Définition 2.3. *Soient* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé,* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de* E *et* $x \in E$. *On dit que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est de Cauchy si*

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}\colon \quad \Big(n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \|x_n - x_m\| < \epsilon\Big).$$

Exercice 2.1. Démontrer que si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé converge, alors la limite est unique. Quelles sont les axiomes de norme dont on a besoin pour établir cette propriété d'unicité ?

Définition 2.4. *Un espace vectoriel normé* $(E, \|\cdot\|)$ *est un espace complet (ou « de Banach ») lorsque toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de Cauchy de* E *est convergente dans* E.

L'exemple le plus connu d'espace de Banach est $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Un autre espace de Banach est $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, où $\|x\| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$ est la norme euclidienne du vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Dans la section suivantes nous allons construire d'espaces de Banach fondamentaux de dimension infinie. Il s'agit d'espaces de fonctions (les points de ces espaces sont des fonctions).

Définition 2.5. *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace vectoriel normé. Une contraction sur* E *est une application* $T\colon E \to E$ *telle que*

$$\exists \gamma,\ 0 \leq \gamma < 1\colon \quad \forall x, y \in E, \quad \|T(x) - T(y)\| \leq \gamma \|x - y\|.$$

Le théorème suivant a des nombreuses applications. Nous l'établissons pour les espaces de Banach, même s'il est valable aussi dans le cadre plus général des espaces métriques complets.

Théorème 2.1 (des contractions, ou de Picard)**.** *Soit* $(E, \|\cdot\|)$ *un espace de Banach et* $T\colon E \to E$ *une contraction Alors* T *possède un et un seul point fixe dans* E *:*

$$\exists!\ x \in E \quad \text{tel que} \quad T(x) = x.$$

Dém. [12] Soit $x_0 \in E$ un point arbitraire. Posons $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = T(x_1)$, etc. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons qu'elle est de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$.

12. Non exigible à l'examen

Observons que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &= \|T(x_n) - T(x_{n-1})\| \\ &\leq \gamma \|x_n - x_{n-1}\| \\ &\leq \cdots \\ &\leq \gamma^n \|x_1 - x_0\|.\end{aligned}$$

Mais alors, pour $n > m \geq 1$,

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{k=m}^{n-1} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \gamma^k \|x_1 - x_0\| = \frac{\gamma^m \|x_1 - x_0\|}{1-\gamma} \to 0 \qquad \text{pour } m \to +\infty.$$

Donc il existe n_0 tel que si $n, m \geq n_0$, on a $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc elle converge dans E. Soit $\bar{x} \in E$ la limite de cette suite. On a

$$x_n \to \bar{x}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{n+1} \to \bar{x} \\ x_{n+1} = T(x_n) \to T(\bar{x}) \quad \text{(puisque } T \text{ est contraction, donc lipschitzienne)} \end{cases}$$

Par l'unicité de la limite, $T(\bar{x}) = \bar{x}$. Il existe donc un point fixe $\bar{x} \in E$ pour la contraction T.

Si $\bar{y}$ est un autre point fixe, alors

$$\|\bar{y} - \bar{x}\| = \|T(\bar{y}) - T(\bar{x})\| \leq \gamma \|\bar{y} - \bar{x}\|.$$

Comme $0 \leq \gamma < 1$. On a nécessairement $\|\bar{y} - \bar{x}\| = 0$ et donc $\bar{y} = \bar{x}$. □

Nous avons aussi le corollaire suivant :

Corollaire 2.2. *Si E est un espace de Banach, $A \subset E$ est fermée et si $T\colon A \to A$ est contractante, alors T possède un et un seul point fixe dans A.*

Dém. En effet, on part de $x_0 \in A$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite dans le théorème converge dans E. Mais cette suite est en fait contenue dans A, qui est fermée. Alors la limite de cette suite doit appartenir à A. □

2.2 La norme $\|\cdot\|_\infty$ et les espaces $B(D,\mathbb{R})$ et $C_b(D,\mathbb{R})$

Dans toute cette section on considère des fonctions $f\colon D \to \mathbb{R}$, définies sur un ensemble de définition $D \subset \mathbb{R}^n$. Bien souvent, dans les applications, on aura $D = [a,b]$, un intervalle de $\mathbb{R}$.

Introduisons la notation suivante : si f est une fonction bornée, on pose

$$\|f\|_\infty \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

Exercice 2.2. L'application $f \mapsto \|f\|_\infty$ définit une norme sur les espaces vectoriels suivants :

- L'espace $B(D,\mathbb{R})$ des fonctions bornées à valeurs réelles
- L' espace $C_b(D,\mathbb{R})$ des fonctions continues et bornées sur D à valeurs réelles.

Observons que si $D = [a,b]$ toute fonction continue est automatiquement bornée, donc on note simplement $C([a,b],\mathbb{R})$ au lieu de $C_b([a,b],\mathbb{R})$. et $C([a,b],\mathbb{C})$ au lieu de $C_b([a,b],\mathbb{C})$

Remarque 2.3. La norme du sup est appelée aussi « norme de la convergence uniforme », puisque si $E = B(D, \mathbb{R})$ ou $E = C_b(D, \mathbb{R})$, alors $f_n \to f$ dans E si et seulement si $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Autrement dit, si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_n,\ \forall x \in D\colon\ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon. \tag{CU}$$

Autrement dit, $f_n \to f$ uniformément sur l'ensemble D.

Remarque 2.4. Rappelons que, par définition, une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur D converge simplement vers f si $\forall x \in D\colon \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. La convergence uniforme implique la convergence simple. Autrement dit :

$$\text{(CU)} \ \Rightarrow\ \forall \epsilon > 0,\ \ \forall x \in D,\ \ \exists n_0 \text{ tel que } \forall n \geq n_0, :\ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

La réciproque en général n'est pas vraie (voir les exercices).

Théorème 2.3. *Les espaces $B(D, \mathbb{R})$ et $C_b(D, \mathbb{R})$, munis de la norme du sup, sont deux espaces de Banach.*

Dém. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $B(D, \mathbb{R})$. Alors, pour tout $x \in D$, la suite réelle $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy (et donc elle converge dans $\mathbb{R}$) puisque

$$\forall m, n\colon\ |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Définissons $f\colon D \to \mathbb{R}$, par

$$\forall x \in D\colon f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Soit $\epsilon > 0$. Il existe n_0 tel que, pour $n, m \geq n_0$,

$$\begin{aligned}\forall x \in D, \quad |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \|f_n - f_m\|_\infty + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq \epsilon + |f_m(x) - f(x)|.\end{aligned}$$

Donc, en prenant $m \to +\infty$,

$$\forall n \geq n_0,\ \forall x \in D, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Ceci implique, que $f\colon D \to \mathbb{R}$ est bornée (puisque, pour tout $x \in D$, $|f_n(x)| \leq \epsilon + \|f_{n_0}\|_\infty$), et donc $f \in B(D, \mathbb{R})$. De plus, par passage au sup sur $x \in D$ dans la dernière inégalité, on trouve

$$\forall n \geq n_0, \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \epsilon.$$

Ceci montre que $f_n \to f$ dans $B(D, \mathbb{R})$ et donc $B(D, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Démontrons maintenant que $C_b(D, \mathbb{R})$ est un espace de Banach. Considérons une suite $(f_n)_{n\in N}$ de Cauchy dans $C_b(D, \mathbb{R})$. Comme $C_b(D, \mathbb{R}) \subset B(D, \mathbb{R})$, d'après le résultat précédent on sait qu'il existe une fonction $f \in B(D, \mathbb{R})$ telle que $\|f_n - f\|_\infty$. Il reste à démontrer que f est continue sur D. Soit alors $x_0 \in D$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe n_0 tel que, si $n \geq n_0$: on a

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq 2\|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(x_0)| \\ &\leq 2\epsilon + |f_n(x) - f_n(x_0)|.\end{aligned}$$

Et comme f_n est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x - x_0\| < \delta$, on a $|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \epsilon$. En conclusion, si $\|x - x_0\| < \delta$, alors $|f(x) - f(x_0)| \leq 3\epsilon$ et ceci montre que f est continue en x_0. Mais alors la fonction $f \in B(D, \mathbb{R})$ appartient en fait à $C_b(D, \mathbb{R})$. Toute suite de Cauchy dans $C_b(D, \mathbb{R})$ converge dans ce même espace ce qui prouve que $C_b(D, \mathbb{R})$ est de Banach. □

Corollaire 2.4. *La limite uniforme sur D d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues et bornées est une fonction f continue et bornée sur D. Dans ce cas, si $x_0 \in D$:*

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\Big) = \lim_{x\to x_0}\Big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\Big).$$

Remarque 2.5. L'espace $C^1([a,b],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, n'est pas un espace de Banach. (Exercice).

Théorème 2.5. *Soient, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ des fonctions de classe C^1, telles que*

- *$\exists g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ telle que $f_n'\to g$ uniformément sur $[0,1]$.*
- *$\exists c\in[a,b]$ tel que la suite $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*

Alors il existe $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ de classe C^1, telle que $f_n\to f$ uniformément dans $[a,b]$. De plus $f'=g$. En particulier,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x) = \Big(\lim_{n\to+\infty}(f_n(x)\Big)'.$$

Dém. Notons

$$f(x) = \int_c^x g(t)\,\mathrm{d}t + \ell,$$

où $\ell = \lim_{n\to+\infty} f_n(c) = f(c)$. Ceci définit une fonction de classe C^1, telle que $f'=g$. De plus, comme

$$f_n(x) = \int_c^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t + f_n(c),$$

on a

$$f_n(x) - f(x) = \int_a^x [f_n'(t)-g(t)]\,\mathrm{d}t + [f_n(c)-\ell]$$

Donc

$$|f_n(x)-f(x)| \le (b-a)\|f_n'-g\|_\infty + |f_n(c)-\ell|.$$

Et par passage au sup

$$\|f_n - f\|_\infty \le (b-a)\|f_n'-g\|_\infty + |f_n(c)-\ell| \to 0.$$

□

Corollaire 2.6. *L'espace $C^1([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme $|\!|\!| f |\!|\!| \overset{\text{déf}}{=} \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ est un espace de Banach.*

Dém. À compléter. □

2.3 Séries dans un espaces de Banach. Séries de fonctions

Dans un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$, la notion de série a bien un sens.

Définition 2.6. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$, où $(E,\|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors :*

- *On dit que la série $\sum x_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$, converge dans E, c'est-à dire qu'il existe $S\in E$ tel que $\|S_n - S\|\to 0$. Dans ce cas on écrit $S=\sum_{n=0}^\infty x_n$.*
- *On dit que la série $\sum x_n$ est normalement convergente si la série réelle $\sum \|x_n\|$ converge.*

Exemple 2.6. Par exemple, la série de $\mathbb{R}^3$, $\sum(2^{-n}, 3^{-n}, \frac{\sin n}{n^2})$ converge normalement dans $\mathbb{R}^3$. La série $\sum(2^{-n}, \frac{(-1)^n}{n}, \frac{\sin n}{n^2})$ converge dans $\mathbb{R}^3$, mais elle n'est pas normalement convergente.

Théorème 2.7. *Dans un espace de Banach, toute série normalement convergente est convergente. Autrement dit, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$,*

$$\sum \|x_n\| \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum x_n \text{ converge.}$$

Dém. À compléter. □

Dans le cas de l'espace de Banach $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, le théorème précédent, affirme alors que toute série absolument convergente est convergente. Dans le cas des espaces $B(D,\mathbb{R})$ et $C_b(D,\mathbb{R})$ le théorème précédent affirme que toute série de fonctions normalement convergente est uniformément convergente. En effet,

$$\sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \sum f_n \text{ converge}\,;$$

mais la convergence de $\sum f_n$ dans l'espace $B(D,\mathbb{R})$ et $C_b(D,\mathbb{R})$ signifie précisément que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme du sup, ou encore que la série de fonctions converge uniformément sur D.

Les deux théorèmes suivants sont la transcription, pour les séries de fonctions, des propriétés correspondantes que l'on a déjà rencontrées pour les suites de fonctions.

Théorème 2.8 (Continuité d'une série de fonctions)**.** *Soit $\sum f_n$, où $f_n\colon D \to \mathbb{C}$, une série de fonctions et $x_0 \in D$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit* continue *en x_0. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur D alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en x_0.*

Théorème 2.9 (Dérivabilité d'une série de fonctions)**.** *Soit $\sum f_n$, où $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions dérivables dans l'intervalle $[a,b]$. On suppose que*

i) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$,

ii) il existe $c \in [a,b]$ tel que $\sum f_n(c)$ converge.

Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$. De plus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est dérivable et

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\Big)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Nous terminons ce chapitre avec un dernier critère de convergence uniforme d'une série de fonctions.

Théorème 2.10. *Si $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ est une suite décroissante*[13] *de fonctions ≥ 0, telle que $\|f_n\|_\infty \to 0$, alors la série alternée*

$$\sum (-1)^n f_n(x)$$

Converge uniformément. De plus, le reste d'ordre n, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \sum(-1)^k f_k(x)$ vérifie

$$|R_n(x)| \leq f_{n+1}(x)$$

13. C'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} \leq f_n$

———

Dém. [14] Posons $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$. On vérifie sans peine que, pour tout $x \in D$,

$$S_{2n}(x)\downarrow, \qquad S_{2n-1}(x)\uparrow, \qquad S_{2n}(x) \geq S_{2n-1}(x), \qquad S_{2n}(x) - S_{2n-1}(x) \to 0.$$

Les suites $(S_{2n}(x))$ et (S_{2n-1}) sont adjacentes, et donc [15] il existe la limite

$$S(x) \overset{\text{déf}}{=} \lim_{n\to+\infty} S_{2n}(x) = \lim_{n\to+\infty} S_{2n-1}(x).$$

Observons aussi que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2n-1}(x) \leq S(x) \leq S_{2n}(x).$$

Mais, si $n \in \mathbb{N}$, on montre comme avant que De plus,

$$0 \leq S(x) - S_{2n-1} = \sum_{k=2n}^{\infty} (-1)^k f_k(x) = f_{2n}(x) + (S(x) - S_{2n}(x)) \leq f_{2n}(x).$$

Et

$$0 \geq S(x) - S_{2n}(x) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} (-1)^k f_k(x) = -f_{2n+1}(x) + (S(x) - S_{2n+1}(x)) \geq -f_{2n+1}(x).$$

Donc dans tous les cas,

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| \leq f_{n+1}(x).$$

De plus, $\|S - S_n\|_\infty \leq \|f_{n+1}\|_\infty \to 0$, ce qui assure que la série de fonctions $\sum(-1)^n f_n$ est uniformément convergente dans D. □

Le théorème précédent sur les séries alternées possède la généralisation suivante, où les coefficients $(-1)^n$ sont remplacés par des termes $\alpha_n(x)$

Théorème 2.11 (critère d'Abel uniforme)**.** *Considérons la série de fonctions, définies sur D, $\sum \alpha_n(x) f_n(x)$ où*

i) La suite (f_n) est décroissante, $f_n \geq 0$ et $\|f_n\|_\infty \to 0$.

ii) Les sommes partielles de la suite $(\alpha_n(x))$ sont uniformément bornées sur D. Autrement dit : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x\in D} |\sum_{k=0}^{n} \alpha_k(x)| \leq M$.

Alors $\sum \alpha_n(x) f_n(x)$ converge uniformément sur D.

Dém. À compléter. □

Remarque 2.7. Tous les résultats de cette section restent vrais pour les suites de fonctions à valeurs complexes. Le seul changement est que, si $f : D \to \mathbb{C}$, alors dans la définition $\|f\|_\infty = \sup_{x\in D} |f(x)|$, l'expression $|f(x)|$ exprime le module du nombre complexe $f(x)$.

14. Non exigible à l'examen

15. La suite $S_{2n}(x)$ est décroissante et minorée par $S_1(x)$. La suite $S_{2n-1}(x)$ est croissante et majorée par $S_0(x)$.

2.4 Séries entières

2.4.1 Rayon de convergence

Les séries entières sont des séries de fonctions de forme particulière. Elles sont bien adaptées à l'opération de dérivation, et donc à la résolution d'équations différentielles.

Définition 2.7. *Une* série entière réelle *est une série de fonctions* $\sum f_n$ *où* $f_n(x) = a_n x^n$, *avec* $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

Définition 2.8. *Le* rayon de convergence *de la série entière* $\sum a_n x^n$ *est*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}\colon\ (|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Le rayon de convergence R d'une série entière peut alors être un réel positif ou nul, ou vérifier $R = +\infty$. Le théorème suivant illustre son importance.

Théorème 2.12. *Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$.*
i) Si $R = 0$, alors $\sum a_n x^n$ ne converge que pour $x = 0$.
ii) Si $R = +\infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.
iii) Si $0 < R < +\infty$, alors si $|x| < R$, $\sum a_n x^n$ converge absolument. De plus, cette série converge normalement dans tout intervalle $[-r, r]$, avec $0 < r < R$.

Dém. Démontrons en détail seulement le point (iii). La méthode pour la démonstration de (i) et (ii) est semblable.

Soit $0 < r < R$. Par définition de sup, il existe $\bar r$ tel que $0 < r < \bar r < R$ et la suite $(|a_n|\bar r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Donc, $\exists M > 0$ tel que $|a_n|\bar r^n \le M$. Mais,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x\in[-r,r]} |a_n x^n| \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \le \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \bar r^n \Big(\frac{r}{\bar r}\Big)^n \le M \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{r}{\bar r}\Big)^n.$$

La dernière série est une série géométrique convergente. Donc la série entière est normalement convergente sur $[-r, r]$. En particulier, cette série est absolument convergente en x, pour tout $x \in [-r, r]$. Comme $0 < r < R$ est arbitraire, la série entière est absolument convergente sur $]-R, R[$.

Si $|x| > R$, alors la suite $(a_n |x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée (par définition de rayon de convergence). Donc $a_n x^n \not\to 0$ et la série entière est alors grossièrement divergente. □

Ce théorème affirme en particulier qu'une série entière $\sum a_n x^n$ converge pour $-R < x < R$ et diverge en dehors de l'intervalle $[-R, R]$. Pour $x = \pm R$, la série peut être convergente ou divergente. Pour le calcul pratique du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ on applique souvent le critère de D'Alembert. Ce critère implique ceci : supposons que la limite $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe : alors

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell}, & \text{si } 0 < \ell < +\infty \\ 0 & \text{si } \ell = +\infty \\ +\infty & \text{si } \ell = 0. \end{cases}$$

Alternativement, on peut faire appel au critère de Cauchy. On trouve alors ceci : si la limite $L = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$ existe, alors

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{si } 0 < \ell < +\infty \\ 0 & \text{si } L = +\infty \\ +\infty & \text{si } L = 0. \end{cases}$$

Exemple 2.8. — La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence est donc $R = +\infty$.
— La série $\sum x^n$ converge si et seulement si $-1 < x < 1$: le rayon de convergence est $R = 1$.
— La série $\sum \frac{(-1)^n}{n3^n} x^n$ converge si et seulement si $-3 < x \leq 3$: on a donc $R = 3$.
— la série $\sum n! x^n$ est divergente pour tout $x \neq 0$. On a alors $R = 0$.

2.4.2 Dérivabilité et intégration d'une série entière

Les théorèmes de dérivation et intégration pour les séries de fonctions s'appliquent aux séries entiéres :

Proposition 2.13. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors pour tout $a < b$ tel que $[a,b] \subset]-R, R[$, on a $\int_a^b (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx$.*

Proposition 2.14. *i) Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.*
ii) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors dans l'intervalle $]-R, R[$, l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est indéfiniment dérivable *et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

Dém. Les séries entières $\sum n a_n x^{n-1}$ et $\sum n a_n x^n$ ont clairement le même rayon de convergence. Soit

$$R = \text{rayon de c.v. de} \sum a_n x^n, \qquad R' = \text{rayon de c.v. de} \sum n a_n x^n$$

On a

$$(n|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \Rightarrow (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée .}$$

Donc

$$R' = \sup\{r \colon (n|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \} \ \leq \ \sup\{r \colon \Rightarrow (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée } \} = R.$$

Réciproquement, montrons que $R \leq R'$. si $0 \leq r < R$, alors il existe $\bar{r}0$ tel que $0 \leq r < \bar{r} < R$ et $|a_n|\bar{r}^n$ est bornée par une constante $M \geq 0$. Mais alors

$$n|a_n|r^n \leq |a_n|\bar{r}^n \, n\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^n \leq M \, n\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^n.$$

La dernière expression tend vers zéro par croissance comparée et elle est alors bornée. Mais alors $r \leq R'$. Par passage au sup sur r, avec $0 \leq r < R$, on trouve $R \leq R'$.

La deuxième affirmation est une conséquence du théorème de dérivabilité des séries, et de la convergence uniforme sur tout intervalle compact contenu dans $]-R, R[$ de la série dérivée. $\square$

2.4.3 Fonctions développables en séries entières

Définition 2.9. *Soit $f\colon]-R,R[\to\mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet un* **développement en série entière** *si et seulement s'il existe une suite de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x\in]-R,R[$ on a $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.*

La proposition précedente implique que toute fonction développable en série entière est infiniment dérivable. De plus, le développement est unique et

$$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Pour les fonctions développable en série entière on a donc

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,\qquad -R<x<R.$$

Pas toutes les fonctions sont développables en série entière : par exemple la fonction $x\mapsto|x|$ ne l'est pas, parce que cette fonction n'est pas dérivable en 0.

étant donnée une fonction f infiniment dérivable le problème se pose de savoir si f est développable en série entière dans un intervalle $]-R,R[$. En général ce n'est pas le cas. En effet :

- La série $\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ pourrait être divergente pour tout $x\neq0$.
- Même si la série $\sum\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge, on pourrait avoir $f(x)\neq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

On cherche alors de critères de développabilité en série entière : la formule de Taylor-Lagrange donne une condition : suffisante

Théorème 2.15. *Soit $R>0$ et $f\colon]-R,R[\to\mathbb{R}$. On suppose que f est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$, et qu'il existe une constante M telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $x\in]-R,R[$, $|f^{(n)}(x)|\leq M$. Alors f est développable en série entière.*

Dém. On applique la formule de Taylor-Lagrange à f entre 0 et x, à l'ordre N : $\exists\, c_N$ compris entre 0 et x tel que

$$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}f^{(N)}(c_N).$$

Donc $0\leq\lim_{N\to+\infty}\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right|\leq\lim_{N\to+\infty}\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}M=0.$ □

On déduit de ce théorème que les fonctions usuelles sont développable en série entière :

— $\forall x\in\mathbb{R},\quad \exp(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$

— $\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{ch}(x)=\dfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$

— $\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{sh}(x)=\dfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$

— $\forall x\in\mathbb{R},\quad \cos(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$

— $\forall x\in\mathbb{R},\quad \sin(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

Les fonctions suivantes sont développables dans l'intervalle $]-1,1[$ (la première et la deuxième formules sont bien connues, les autres s'en déduisent par dérivation ou primitivation).

— $\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$

— $\forall x \in]-1,1[, \quad \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

— $\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$

— $\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

— $\forall x \in]-1,1[, \quad (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ici, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$.

La dernière formule mérite une explication détaillée : on vérifie avec la formule de D'Alembert que le rayon de convergence de la dernière série entière est égal à 1. Posons $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$. À l'aide de la formule

$$(n+1)\binom{\alpha}{n+1} + n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha}{n},$$

on démontre que

$$\forall |x| < 1: \ (1+x)S'(x) = \alpha S(x).$$

Pour resoudre cette équation différentielle on pose $g(x) = (1+x)^{-\alpha} S(x)$. On a alors $g'(x) = 0$ et donc $g(x) = g(0) = 1$. Donc $S(x) = (1+x)^\alpha$.

2.4.4 Séries entières complexes

Une série entière complexe est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et $z \in \mathbb{C}$. On définit pour ces séries la notion de rayon de convergence exactement comme dans la définition 2.8. L'analogue du théorème 2.12 est :

Théorème 2.16. *Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.*

i) Si $R = 0$, alors $\sum a_n z^n$ ne converge que pour $z = 0$.

ii) Si $R = +\infty$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument.

iii) Si $0 < R < +\infty$, alors si $|z| < R$, $\sum a_n z^n$ converge absolument. De plus, cette série converge normalement dans tout disque $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \le r\}$, avec $0 < r < R$.

Exemple 2.9. Le rayon de convergence de la série entière complexe $\sum \frac{1}{n!} z^n$ est $R = +\infty$. Ainsi la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il est naturel de poser,

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n. \tag{2.1}$$

Si $z = x \in \mathbb{R}$, on retrouve le développement en série entière de $\exp(x) = e^x$. Calculons maintenant $\exp(z)$ pour $z = iy$ imaginaire pur. On a

$$\begin{aligned}\exp(iy) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(y) + i \sin(y).\end{aligned}$$

Ce calcule explique la formule bien connue (souvent présentée comme une définition de l'exponentiel imaginaire) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, avec $y \in \mathbb{R}$.

En utilisant la formule du produit de Cauchy [16] des séries on peut démontrer la validité de l'identité fondamentale

$$\forall\, z_1\ z_2 \in \mathbb{C} \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2). \tag{*}$$

Si $z \in \mathbb{C}$ on peut définir $\cos(z)$ et $\sin(z)$ comme les sommes des séries entières (de rayon de convergence $R = +\infty$) :

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Observer que

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz)), \qquad \sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz)).$$

Ces identités et la formule (*) permettent de retrouver facilement les formules classiques de trigonométrie, qui se généralisent aux nombres complexes.

Remarque 2.10. Au Lycée, la fonction exponentielle est introduite très vite, mais souvent sans une définition précise. En fait, la définition rigoureuse de la fonction exponentielle n'est pas immédiate. Pour cela il y a au moins trois manières de procéder.

1. On définit d'abord la fonction logarithme, comme l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0, \infty[$ s'annulant en 1 (ceci nécessite de développer d'abord la théorie de l'intégration, pour pouvoir définir $\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$). Ensuite on définit exp comme la fonction inverse de la fonction logarithme.

---

16. Rappelons que si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries numériques absolument convergentes, alors

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \qquad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \qquad \text{(produit de Cauchy)}.$$

On rappelle aussi que, dans le cas $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$ pour tout n, cette formule découle de l'encadrement

$$P_N \leq S_N T_N \leq P_{2N},$$

où $S_N = \sum_{i=0}^{N} a_i$, $T_N = \sum_{j=0}^{N} b_j$ et $P_N = \sum_{n=0}^{N} c_n$. Dans le cas général on observe que

$$|S_N T_N - P_N| \leq \sum\sum_{0 \leq i,j \leq N,\ i+j > N} |a_i b_j| \to 0 \qquad \text{pour } N \to +\infty,$$

d'après le cas précédent.

2. Sinon, on peut démontrer qu'il existe une et une seule fonction : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1. \end{cases}$$
et définir exp comme cette solution. Ceci peut se faire à l'aide du théorème des contractions en ramenant le problème de Cauchy à une équation intégrale. (Donc la théorie de l'intégration est encore un prérequis, si on définit l'exponentielle de cette manière.).
3. Sinon, on peut définir de manière bien plus directe la fonction exponentielle comme la somme de la série entière (2.1). Cette méthode a l'avantage de définir naturellement l'exponentielle dans $\mathbb{C}$. Il y a cependant un inconvenenient : le calcul de la dérivée de l'exponentielle exige alors le théorème de dérivation pour les séries entières, dont la démonstration repose sur plusieurs ingrédients (convergence uniforme, intégration, etc.).

3 Équations différentielles linéaires

3.1 Fonctions vectorielles et matricielles

Introduisons quelques notations. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note dans ce chapitre $|x|$ la norme euclidienne de x, à savoir

$$|x| = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{1/2}.$$

Cette notation est compatible avec celle de valeur absolue, lorsque $n = 1$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice réelle carrée $n \times n$, on peut l'identifier à un vecteur de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Il est alors cohérent de noter, si $A = (a_{i,j})$,

$$|A| = (\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2)^{1/2}.$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $C_b(I, \mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions vectorielles bornées $f : I \to \mathbb{R}^n$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in I} |f(t)|.$$

Aussi, si $A \in C_b(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ est une fonction matricielle bornée, on notera alors

$$\|A\|_\infty = \sup_{t\in I} |A(t)|.$$

Exemple 3.1. Si $A \in C_b(\mathbb{R}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ est la fonction matricielle définie par $A(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\|A\|_\infty = \sqrt{17}$.

Proposition 3.1.

1. *Si A une matrice $n \times n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, $|Ax| \le |A|\ |x|$.*
2. *Si $A \in C_b(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $f \in C_b(I, \mathbb{R}^n)$, alors $Af \in C_b(I, \mathbb{R}^n)$ et $\|Af\|_\infty \le \|A\|_\infty \|f\|_\infty$.*

Dém. En effet, si on note A_i les vecteurs ligne de la matrice A

$$\begin{aligned} |Ax| = |(A_1 \cdot x, \dots, A_n \cdot x)| &= \Big(\sum_{i=1}^{n} |A_i \cdot x|^2\Big)^{1/2} \\ &\le \Big(\sum_{i=1}^{n} |A_i|^2\ |x|^2\Big)^{1/2} \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\ &= \Big(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{i,j}|^2\Big)^{1/2} |x| = |A|\ |x|. \end{aligned}$$

Pour la seconde affirmation il suffit d'écrire, pour tout $t \in I$, $|A(t)f(t)| \le |A(t)|\ |f(t)|$ et passer au sup sur la variable t. $\square$

Si $f : I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle, on note $f = (f_1, \dots, f_n)$ où $f_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ sont les composantes de f. Rappelons que, par définition, on dit que f est dérivable (resp.

intégrable) si et seulement si toutes ses composantes f_1,. . .,f_n sont dérivables (resp. intégrables). Dans ce cas, on pose

$$f' = (f_1', \ldots, f_n')$$

et, si $I = [a, b]$,

$$\int_a^b f = \Big(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n\Big).$$

En appliquant à la norme euclidienne la remarque 1.11, on voit que si f est une fonction vectorielle Riemann-intégrable, alors la fonction scalaire $|f|$ l'est aussi et

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leq \int_a^b |f|.$$

De la même manière, si $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ sont deux fonctions matricielles dérivables alors

$$(MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t). \tag{3.1}$$

Le produit de matrices n'étant pas commutatif, l'ordre des facteurs ici est important.

3.2 Systèmes différentiels linéaires et équations de Volterra

Dans toute cette section nous suppons systématiquent que I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

Définition 3.1. *Un système différentiel d'ordre n (ou équation différentielle vectorielle) linéaire sur l'intervalle I est une équation de la forme*

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t), \tag{E}$$

où l'inconnue $U\colon I \to \mathbb{R}^n$ est une fonction dérivable. Si $B(t) = 0$ pour tout $t \in I$ on dit que le système est « homogène ». Si la fonction matricielle A est indépendente de t on dit que le système est « à coefficients constants ».

Il serait plus correct d'appeler « affines » ces systèmes différentiels, mais ce n'est pas la terminologie couramment adoptée.

Exemple 3.2. Le système différentiel homogène et à coefficients constants

$$\begin{cases} u'(t) = -v(t) \\ v'(t) = u(t) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

admet comme solutions (par exemple) les fonction $u(t) = r\cos(t)$ et $v(t) = r\sin(t)$, $r \in \mathbb{R}$. Ici le système est de la forme vectorielle (E), avec $U(t) = \binom{u(t)}{v(t)}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \binom{0}{0}$.

Un « problème de Cauchy linéaire » est la donnée d'un système différentiel linéaire et d'une « condition initiale » :

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) + B(t) \\ U(t_0) = U_0. \end{cases} \tag{P}$$

Ici $t_0 \in I$ et $U_0 \in \mathbb{R}^n$ est donnée.

Définition 3.2. *Une équation de Volterra linéaire est une équation de la forme*

$$U(t) = U_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)U(s) + B(s)]\,\mathrm{d}s, \qquad t \in I. \tag{V}$$

Ici, $U\colon I \to \mathbb{R}^n$ *est l'inconnue et* $A\colon I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B\colon I \to \mathbb{R}^n$. *Ici,* $t_0 \in I$ *et* $U_0 \in \mathbb{R}^n$ *est donnée.*

Il est parfois utile de ramener l'étude d'un problème de Cauchy à une équation intégrale. Ceci est toujours possible, puisqu'un problème de Cauchy est équivalent à l'équation de Volterra correspondante :

Proposition 3.2. *Soit* I *un intervalle et* $t_0 \in I$. *Soit* $U_0 \in \mathbb{R}^n$. *Alors*

$$\begin{cases} U \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \\ U'(t) = A(t)u(t) + B(t) \quad \forall t \in I \\ U(t_0) = U_0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} U \in C(I, \mathbb{R}^n) \\ U(t) = U_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} [A(s)U(s) + B(s)]\,\mathrm{d}s \quad \forall t \in I. \end{cases}$$

Dém. Pour l'implication $\Rightarrow$ il suffit d'intégrer terme-à-terme l'équation différentielle. Pour l'implication $\Leftarrow$, on observe d'abord que $s \mapsto A(s)U(s) + B(s)$ est une application continue, donc sa fonction intégrale est de classe C^1. Mais alors U est de classe C^1 et la conclusion s'obtient en dérivant terme-à-terme. $\square$

Pour chercher une solution U à l'équation linéaire de Volterra, on introduit la fonction

$$\Phi\colon C(I, \mathbb{R}^n) \to C(I, \mathbb{R}^n),$$

où, pour tout $U \in C(I, \mathbb{R}^n)$, $\Phi(U)$ est l'application définie par

$$\forall t \in I, \quad \Phi(U)(t) = U_0 + \int_{t_0}^{t} [A(s)U(s) + B(s)]\,\mathrm{d}s.$$

Ainsi, U est solution de l'équation de Volterra si et seulement si

$$\forall\, t \in I \quad U(t) = \Phi(U)(t),$$

En conclusion

$$\begin{cases} U \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \\ U'(t) = A(t)u(t) + B(t) \quad \forall t \in I \\ U(t_0) = U_0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} U \in C(I, \mathbb{R}^n) \\ U = \Phi(U) \quad \text{(c'est à dire, } U \text{ point fixe pour } \Phi). \end{cases}$$

Lemme 3.3. *Soit* $a < b$ *et* $I = [a, b]$. *Sous les hypothèses précédentes sur* A *et* B, *pour tout* $U, V \in C(I, \mathbb{R}^n)$,

$$\|\Phi(U) - \Phi(V)\|_\infty \leq |b - a|\ \|A\|_\infty\, \|U - V\|_\infty.$$

Dém. En effet, pour tout $t \in [a, b]$,

$$|\Phi(U)(t) - \Phi(V)(t)| \leq \int_{t_0}^{t} |A(s)|\, |U(s) - V(s)|\,\mathrm{d}s \leq |b - a|\ \|A\|_\infty \|U - V\|_\infty.$$

$\square$

En particulier, grâce au théorème des contractions nous pouvons déjà établir le résultat suivant. (Nous ferons mieux un peu plus loin).

Corollaire 3.4. *Soit $a < b$ et $t_0 \in [a, b]$. Supposons $A \in C([a, b], \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. On suppose $|b - a| \, \|A\|_\infty < 1$. Le problème de Cauchy linéaire*

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) + B(t), \\ U(t_0) = U_0 \end{cases} \tag{P}$$

possède une et une seule solution $U \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Dém. La conclusion est immédiate, puisque le lemme précédent assure que Φ est une contraction sur $C([a, b], \mathbb{R}^n)$, qui est un espace de Banach. Alors Φ possède un et un seul point fixe $u \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$. Ce point fixe u est l'unique solution du problème de Cauchy (P). □

Proposition 3.5. *Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux solutions définies sur I d'un même problème de Cauchy (P), alors $\vec{v} = \vec{w}$.*

Dém. [17] Si $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont deux solutions du même problème de Cauchy linéaire (P), définies sur un intervalle I (compact ou non), alors le corollaire précédent garantit que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coïncident au moins sur un petit intervalle centré en t_0. Montrons qu'en réalité $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coïncident sur tout l'intervalle I.

Posons

$$t_1 = \sup\{t \geq t_0, \ t \in I : \vec{v}(t) = \vec{w}(t)\}.$$

On doit avoir $t_1 = \sup I$. En effet, si $t_1 < \sup I$, alors $\vec{v}(t_1) = \vec{w}(t_1) =: U_1$ par la continuité de $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Donc par l'unicité du problème de Cauchy (P) avec condition initiale $U(t_1) = U_1$, sur un petit intervalle de type $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$, nous avons que $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coïncident sur $[t_0, t_1 + \delta]$. C'est absurde, puisque cela contredit la définition de t_1. Ainsi $\vec{v}$ et $\vec{w}$ coïncident pour $t \geq t_0$. On prouve de même qu'elles coïncident pour $t \leq t_0$. □

Prolongement des solution. [18]

Traitons le cas d'un intervalle I général (éventuellement illimité) et considérons le problème de Cauchy (P). On se propose de prolonger la solution (définie a priori seulement dans un petit intervalle centré en t_0, à une solution définie globalement sur I. Détaillons d'abord le problème du prolongement « à droite ».

Considérons l'intervalle $J \subset I$ défini par

$$J = \big\{\lambda \in I \text{ tels qu'il existe } U_\lambda \colon [t_0, \lambda] \to \mathbb{R}^n \text{ solution de (P) sur } [t_0, \lambda]\big\}$$

Soit

$$\lambda^* = \sup J$$

Démontrons que $\lambda^* = \sup I$. Par contradiction, supposons que $\lambda^* < \sup I$. Il existe b tel que $t_0 < \lambda^* < b < \sup I$. (Le fait que $t_0 < \lambda^*$ est une conséquence du Corollaire 3.4). Soit $\delta > 0$ tel que

$$2\delta \sup_{t \in [t_0, b]} |A(t)|_\infty < 1.$$

17. Non exigible à l'examen
18. Seul l'énoncé du théoroème 3.6 est exigible à l'examen

La solution de (P) $U_{\lambda^*-\delta}$, définie sur $[t_0, \lambda^* - \delta]$, est unique. Considérons alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) + B(t) \\ U(\lambda^* - \delta) = U_{\lambda^*-\delta}(\lambda^* - \delta). \end{cases}$$

D'après le corollaire, ce problème possède une solution $\hat{U}$ qui est définie, au moins, sur l'intervalle $[\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta] \cap I$. Nous pouvons utiliser cette solution $\hat{U}$ pour prolonger la solution $U_{\lambda^*-\delta}$ du problème (P) à droite, au delà de l'instant λ^*. Mais, par définition de λ^*, aucune solution de (P) n'est prolongeable au delà de λ^*. C'est absurde, donc $\lambda^* = \sup I$.

Le prolongement à gauche se fait de la même manière. En conclusion, il existe une solution du problème (P) qui est définie sur I tout entier.

Nous avons alors démontré le théorème suivant.

Théorème 3.6. *Si I est un intervalle arbitraire et $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, $B \in C(I, \mathbb{R}^n)$, alors le problème de Cauchy linéaire (P) possède une et une seule solution $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$.*

Exemple 3.3. Soit $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues. Le problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} u'(t) = \ln(1+t)\, u(t) + v(t) + f(t) \\ v'(y) = e^t\, u(t) + \frac{1}{t-2} v(t) + g(t) \\ u(0) = u_0 \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

possède une unique solution (u, v) définie sur l'intervalle $]-1, 2[$.

Trajectoires et courbes intégrales

Définition 3.3 (Trajectoires). *Si $\vec{v} \colon I \to \mathbb{R}^n$ est une solution du système différentiel linéaire (E), l'ensemble de $\mathbb{R}^n$ $\{\vec{v}(t) \colon \mathbb{R}^n \colon t \in I\}$ est dite « trajectoire » du système.*

Par exemple, pour le système différentiel de l'exemple 3.2, les cercles de rayon $r > 0$ sont des trajectoires su systèmes.

L'unicité des solutions implique que deux trajectoires distinctes ne s'intersectent pas. Dans le cas $n = 1$, pour visualiser la dynamique d'une équation différentielle scalaire, plutôt que de dessiner les ensembles $\{v(t) \colon t \in I\}$ (qui ne seraient que des intervalles de $\mathbb{R}$), on préfère représenter dans $\mathbb{R}^2$, les graphes des fonctions $t \mapsto v(t)$. Ces graphes, où $v \colon I \to \mathbb{R}$ est une solution de l'équation différentielle, sont appelés « courbes intégrales ».

3.3 Solution générale d'un système différentiel linéaire

3.3.1 Cas général : coefficients variables

Définition 3.4. *La « solution générale » d'un système différentiel linéaire*

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t), \qquad t \in I \tag{E}$$

est l'ensemble des solutions de ce système.

Commençons par observer que

- Si v et w sont deux solutions de (E) alors leur différence $v - w$ est une solution du système linéaire homogène associé, à savoir du système

$$U'(t) = A(t)U(t), \qquad t \in I \tag{H}$$

- Si v est une solution de (E), et u est une solution du système homogène associé, alors $v + U$ est aussi une solution de (E).

Donc :

La solution générale de (E) est donnée par la solution générale de (H) plus une solution particuliere de (H)

Le théorème suivant donne la structure de la solution générale de (H).

Théorème 3.7. *Soit $A \in C(I, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$. La solution générale du système différentiel linéaire homogène*

$$U'(t) = A(t)u(t), \qquad t \in I \tag{H}$$

est un espace vectoriel de dimension n.

Dém. [19] Si w et w sont deux solutions et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(v + \lambda w)' = v'(t) + \lambda w'(t) = A(t)(v + \lambda w)(t)$. Donc $v + \lambda w$ est solution. Ceci montre que la solution générale est bien un espace vectoriel.

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, où $e_1 = (1, 0, \ldots)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Considérons les problemes de Cauchy

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) \\ U(t_0) = e_k \end{cases} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{P$_k$}$$

Pour tout $k = 1, \ldots, n$, le problème (P$_k$) possède une et une solution $\vec{v}_k$. Montrons que $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ forme une base de l'espace des solutions.

Les solutions $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ sont linéairement indépendantes, puisque

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{v}_k = 0 \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{v}_k(t_0) = 0_{\mathbb{R}^n} \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_{\mathbb{R}^n} \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Ensuite si $\vec{v}$ est une solution du système différentiel $U'(t) = A(t)U(t)$, on a

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{v}_k \qquad \text{avec } \lambda_k = \vec{v}(e_k).$$

En effet, les deux membres à gauche et droite sont solutions sur I du même problème de Cauchy

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t), \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

Par l'unicité des solutions, les deux membres doivent coïncider. □

19. Non exigible à l'examen

Exemple 3.4. Le système différentiel homogène et à coefficients constants

$$\begin{cases} u_1'(t) = -u_2(t) \\ u_2(t) = u_1(t) \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

admet comme solution générale la famille des fonctions définies pour $t \in \mathbb{R}$

$$t \mapsto a \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Cette famille est bien un espace vectoriel de dimension 2.

3.3.2 Cas particulier : systèmes à coefficients constants

Le résultat suivant est une application classique de l'algèbre linéaire aux systèmes différentiels à coefficients constants.

Proposition 3.8. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice. Considérons le système différentiel homogène à coefficients constants*

$$U'(t) = AU(t).$$

Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A et λ la valeur propre correspondante, alors la fonction

$$t \mapsto e^{\lambda t}\vec{v}$$

est une solution du système différentiel. En particulier, si A diagonalisable sur $\mathbb{R}$, A admet une base de vecteurs propres $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \dots, n)$. Une base de l'espace des solutions est donnée par les fonctions

$$t \mapsto e^{\lambda_i t}\vec{v}_i, \qquad i = 1, \dots, n,$$

où λ_i est la valeur propre associée au vecteur propre $\vec{v}_i$.

Dém. En effet

$$(e^{\lambda t}\vec{v})' = e^{\lambda t}\lambda\vec{v} = e^{\lambda t}A\vec{v} = A(e^{\lambda t}\vec{v}).$$

□

Exemple 3.5. Soit le système différentiel

$$U'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} U(t).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ et $\lambda_3 = 5$ et les vecteurs propres

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solution générale du système différentiel est alors

$$t \mapsto a \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ e^t \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Exponentiel d'une matrice carrée. L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace de Banach pour la norme euclidienne de matrice $A \mapsto |A|$ définie dans la section 3.1. Par conséquent, toute série de matrices $\sum A_k$ normalement convergente (c'est à dire telle que $\sum |A_k|$ converge) est convergente : il existe alors une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$.

Considérons maintenant une matrice A. La séries $\sum \frac{|A|^k}{k!}$ étant convergente, nous pouvons définir une nouvelle matrice

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Ici A^0 désigne la matrice identité.

Exemple 3.6. Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{smallmatrix}\right)$, $b \neq 0$, on calcule par récurrence, pour $k \geq 1$, $A^k = \left(\begin{smallmatrix} 0 & ab^{k-1} \\ 0 & b^k \end{smallmatrix}\right)$. Mais $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} = e^b$. Donc

$$\exp(A) = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b}(e^b - 1) \\ 0 & e^b \end{pmatrix}.$$

Des algorithmes d'algèbre linéaire (diagonalisation, décomposition de Dunford, etc.) permettent de calculer, un peu laborieusement, l'exponentiel d'une matrice réelle $n \times n$.

Théorème 3.9. *L'unique solution du problème de Cauchy linéaire homogène à coefficients constants*

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

est la fonction $t \mapsto \exp(tA)U_0$.

Dém. Considérons la fonction matricielle $t \mapsto \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$. Le théorème de dérivation d'une série, établi pour le fonctions scalaires (Theorème 2.9) reste vrai pour les fonctions matricielles. Mais alors,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{t^{k-1} A^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!} = A \exp(tA).$$

Observons maintenant que (c'est un cas particulier de (3.1)) :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\exp(tA)U_0\Big) = A \exp(tA)U_0.$$

Donc $u(t) := \exp(tA)u_0$ vérifie l'équation différentielle. De plus on a clairement

$$U(0) = IU_0 = U_0.$$

□

3.4 Systèmes différentiels triangulaires

Commençons par traiter le cas des fonctions $u \colon I \to \mathbb{R}$ scalaires. La théorie précédente s'applique, mais on peut aussi facilement expliciter les solutions.

Équations linéaires d'ordre 1 et méthode de variation de la constante Considérons l'équation linéaire (scalaire) d'ordre 1, sur un intervalle I.

$$u' + a(t)u = b(t). \tag{E1}$$

L'équation homogène associée est

$$u' + a(t)u = 0. \tag{H1}$$

Soit $A(t)$ une primitive sur I de $a(t)$. En multipliant cette équation par $e^{A(t)}$ on trouve $(e^{A(t)}u)' = 0$. Donc $e^{A(t)u} = c$ est constante sur I. Mais alors, la solution générale de l'équation homogène (H1) est $u(t) = ce^{-A(t)}$. Pour trouver une solution particulière de l'équation (E1), on peut faire appel à la méthode de variations des constantes : il s'agit de chercher une solution de (E1) parmi les fonctions de la forme

$$u(t) = c(t)e^{-A(t)}.$$

Un petit calcul montre qu'il faut que $c'(t) = b(t)e^{A(t)}$. En conclusion, la solution générale de l'équation (E1) est

$$u(t) = c(t)e^{-A(t)} + c\,e^{-A(t)},$$

où

$$c(t) = \int b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t, \qquad A(t) = \int a(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{et } c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.7. La solution générale sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle

$$u' + u/t = e^t$$

est, d'après l'application de la méthode ci-dessus,

$$u(t) = \frac{(t-1)e^t}{t} + c\,\frac{1}{t}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.8. La formule précédente permet de trouver la solution générale de systèmes différentiels triangulaires d'ordre n (c'est-à-dire associée à une matrice $A(t)$ triangulaire). Par exemple,

$$\begin{cases} u'(t) = a(t)u(t) + b(t) \\ v'(t) = c(t)u(t) + d(t)v(t) + e(t) \end{cases}$$

En effet, on commence par résoudre l'équation différentielle linéire scalaire pour u et après substitution dans la deuxième équation on obtient une autre équation différentielle linéaire scalaire pour v.

3.5 Équations différentielles linéaires d'ordre supérieure

Dans toute cette section nous désignons par $u\colon I \to \mathbb{R}$ des fonction scalaires.

3.5.1 Cas général. Coefficients variables

Définition 3.5. *Soient $a_0(t)$, $a_1(t)$, $\dots a_{k-1}(t)$ et $b(t)$ des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Une équation différentielle linéaire est une équation de la forme*

$$u^{(k)} + a_{k-1}(t)u^{(k-1)} + \cdots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b(t), \qquad t \in I. \tag{3.2}$$

Si le terme à droite vérifie $b(t) \equiv 0$ sur I, alors l'équation est dite homogène. *L'ensemble des solutions est appelé « solution générale ».*

En général, on peut réduire une équation différentielle d'ordre supérieur à un système du premier ordre. Voici un exemple de la démarche :

Exemple 3.9. Considérons l'équation scalaire d'ordre 3

$$u'''(t) = 3tu''(t) + \sin t\, u(t) + |t|.$$

On introduit la fonction vectorielle $U = (U_1, U_2, U_3) := (u, u', u'')$. Avec ces notations on voit que l'équation donnée équivaut au système

$$\begin{cases} U_1' = U_2 \\ U_2' = U_3 \\ U_3'(t) = 3tU_3(t) + \sin tU_1(t) + |t|. \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous la forme vectorielle

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t), \qquad \text{avec} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sin t & 0 & 3t \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ |t| \end{pmatrix}$$

En général, l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre k s'écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$u'(t) = A(t)u + B(t).$$

Ici,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & & \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \cdots & \cdots & -a_{k-1}(t) \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Nous déduisons alors des résultats de la section précédente le théorème suivant :

Théorème 3.10. *La solution générale d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre k homogène est un espace vectoriel de dimension k.*

Pour une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre k non homogène, la solution générale sera donnée par une solution particulière plus la solution générale de l'équation différentielle homogène associée.

3.5.2 Cas particulier : coefficients constants

Une équation différentielle linéaire (scalaire) *homogène* à coefficients constants est une équation de la forme

$$u^{(k)} + a_{k-1}u^{(k-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = 0, \tag{Hk}$$

où $a_{k-1}, \ldots a_0$ sont des constantes réelles.

Introduisons le polynôme caractéristique de cette équation, qui par définition est le polynôme

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Exemple 3.10. L'équation différentielle homogène d'ordre 2

$$u'' - 3u' + 2u = 0$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$, qui possède les deux racines réelles $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Observons que e^t et e^{2t} sont deux solutions linéarement indépendantes de l'équation différentielle. Donc l'équation a pour solution générale

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.11. L'équation différentielle homogène d'ordre 2

$$u'' - 2u' + u = 0$$

a pour polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, qui possède une racine double $\lambda = 1$. Observons que e^t est bien une solution de l'équation différentielle. Mais cela ne suffit pas pour décrire la solution générale $\mathcal{V}_0$, qui est un espace de dimension 2. Observons cependant que te^t est une autre solution de l'équation, indépendente de la précédente. Donc l'équation a pour solution générale

$$u(t) = c_1 e^t + c_2\, te^t, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 3.12. L'équation

$$u''' - 2u'' + 2u' = 0$$

admet le polynôme caractéristique $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$ dont les racines sont $\lambda = 0$, $\lambda = 1 + i$ et $\lambda = 1 - i$. La fonction constante $t \mapsto e^{0\lambda} = 1$ est une solution de l'équation. Les fonctions à valeurs complexes $t \mapsto e^{(1+i)t}$ et $t \mapsto e^{(1-i)t}$ sont bien deux solutions de l'équation différentielle, mais afin d'écrire une solution générale en termes de fonctions réelles on préfère prendre leur somme/différence. Ainsi, la solution générale est

$$u(t) = c_1 + c_2 e^t \cos t + c_2 \sin t, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

L'opérateur de dérivation. [20] Soit D l'« opérateur de dérivation », c'est à dire l'application $D\colon C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui à toute fonction dérivable associe sa dérivée. Pour alléger les notations, on n'écrit pas de parenthèses et l'on note

$$Df := D(f) = f'$$

20. Seul l'énoncé du théorème 3.11 est exigible à l'examen

pour toute fonction dérivable f. Avec ce formalisme, l'équation différentielle

$$u'(t) - \lambda u(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

s'écrit

$$(D - \lambda)u = 0.$$

L'espace de solutions est engendré par la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$.

L'équation différentielle d'ordre 2

$$u''(t) + a_1 u'(t) + a_2 u(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}$$

s'écrit

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)u = 0,$$

où λ_1 et λ_2 sont les deux racines (éventuellement complexes conjuguées) du polynôme caractéristique. En effet, on sait que $a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$, $a_0 = \lambda_1\lambda_2$ et en développant on trouve $0 = (D - \lambda_1)(u' - \lambda_2) = u'' - (\lambda_1 + \lambda_2)u' + \lambda_1\lambda_2$ et

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

Plus en général, pour l'équation différentielle (Hk), en factorisant le polynôme caractéristique,

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_k)$$

on peut écrire l'équation différentielle sous la forme

$$(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\cdots(D - \lambda_k)u = 0.$$

Ceci montre que la fonction $t \mapsto e^{\lambda_k t}$ est une solution (puique $(D - \lambda_k)e^{\lambda_k t} = 0$ et, après, quand on applique $(D - \lambda_1)(D - \lambda_2)\cdots(D - \lambda_{k-1})$ à la fonction nulle on trouve la fonction nulle). En échangeant l'ordre des racines, on voit alors que $t \mapsto e^{\lambda_i t}$, $i = 1, \ldots, k$ sont des solutions de l'équation différentielle (Hk).

Si λ est une racine complexe alors $t \mapsto e^{\lambda} t$ est une solution de l'équation différentielle à valeurs complexes. Mais si λ est une racine complexe, par exemple $\lambda = \alpha + i\beta$, alors $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ est aussi une racine. Or,

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \\ e^{\bar{\lambda} t} &= e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)). \end{aligned}$$

Ainsi, on construit deux solutions à valeurs réelles en prenant

$$\begin{aligned} \frac{e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda} t}}{2} &= e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ \frac{e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda} t}}{2i} &= e^{\alpha t}\sin(\beta t). \end{aligned}$$

Si toutes les racines (réelles ou complexes) sont de multiplicité égale à 1, les fonctions précédentes sont toutes distinctes et linéairement indépendantes. On construit alors, avec ces k-fonctions une base de l'espace des soltutions.

Traitons le cas d'une racine λ (réelle ou complexe) de multiplicité $m \geq 2$. Montrons que les m-fonctions

$$t \mapsto t^j e^{\lambda t}, \qquad j = 1, \ldots, m-1$$

est une solution (éventuellement à valeurs complexes) sont des solutions de (Hk). L'équation différentielle (Hk) peut s'écrire

$$(D - \lambda_1) \cdots (D - \lambda_l)(D - \lambda)^m u = 0, \qquad \ell + m = k,$$

De plus,

$$\begin{aligned}(D - \lambda)^m \big(t^j e^{\lambda t}\big) = (D - \lambda)^{m-1} \big(j t^{j-1} e^{\lambda t}\big) \\ = j(j-1) \cdots (j-m+1) t^{j-m} e^{\lambda t}\end{aligned}$$

et le coefficient $j(j-1)\cdots(j-m+1)$ s'annule pour tout entier $j \leq m$. Ceci prouve que les m solutions

$$t \mapsto t^j e^{\lambda t}, \qquad j = 1, \ldots, m$$

sont des solutions de l'équation différentielle (Hk).

Le théorème suivant résume les considérations précédentes :

Théorème 3.11. *Considérons l'équation différentielle linéaire (scalaire)* homogène *à coefficients constants (Hk).*

1. *Si λ, est une racine réelle du poynôme caractéristique, de multiplicité $m \geq 1$ les fonctions*

$$e^{\lambda t},\ t e^{\lambda t},\ \ldots,\ t^{m-1} e^{\lambda t}$$

   sont des solutions de l'équation (Hk).

2. *Si $\lambda = \alpha + i\beta$ (avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), est une racine complèxe du poynôme caractéristique$\lambda \in \mathbb{C}$ de multiplicité $m \geq 1$ (au quel cas aussi $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ sera une racine complèxe conjuguée), alors*

$$t \mapsto t^j e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad ou \quad t \mapsto t^j e^{\alpha t} \sin(\beta t), \qquad j = 1, \ldots, m$$

   sont des solutions de l'équation (Hk).

Les k solutions ainsi obtenues forment une base de l'espace de solutions de l'équation (Hk).

Exemple 3.13. La solution générale de l'équation différentielle

$$u''' - 4u'' + 13u' = 0,$$

dont le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 14\lambda$, qui admets les trois racines 0 et $2 \pm 3i$ est

$$t \mapsto a + e^{2t}(b \cos(3t) + c \sin(3t)), \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Plus en général, on peut considérer les équations différentielles linéaires à coefficients constants avec second membre.

$$u^{(k)} + a_{k-1} u^{(k-1)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = f(t). \tag{Ek}$$

Les techniques vu précedemment fournissent la solution générale de l'équation homogène associée. Pour trouver la solution générale de l'équation (Ek) il ne reste qu'à trouver une solution particulière de (Ek). Pour ce faire, on peut chercher d'abord des solutions qui "ressemblent" à la fonction $f(t)$ [21]. Si on n'en trouve pas, il peut être utile d'appliquer la méthode de variations des constantes.

3.6 Équations différentielles non-linéaires

Une équation différentielle scalaire

$$u' = f(t, u(t)), \qquad t \in I$$

où f est une fonction de deux variables est non linéaire lorsque l'application $u \mapsto f(t, u)$ est non linéaire. Nous ne présentons pas de théorie générale, mais nous nous limitons à illstrer deux exemples.

Exemple 3.14. Considérons, par exemple, le problème de Cauchy non-linéaire

$$\begin{cases} u'(t) = u(t)^2 \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

Observons qu'au voisinage de 0 la fonction u ne s'annule pas et que $u'(t)u^{-2}(t) = 1$. Donc, en calculant une primitive terme-à-terme $u(t)^{-1} = -t + c$, avec $c = 1$ à cause de la condition initiale $u(0) = 1$. Mais alors $u(t) = 1/(1-t)$ et on voit alors que la solution « explose » en $t = 1$. Cet exemple montre qu'en général les solutions d'une équation différentielle non-linéaire ne sont toujours pas définies globalement sur tout l'intervalle I où la fonction $t \mapsto f(t, u)$ est définie.

Exemple 3.15. Considérons le problème de Cauchy non-linéaire

$$\begin{cases} u'(t) = 3u(t)^{2/3} \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

Pour ce problème il n'y a pas unicité de solution. En effet, on vérifie directement que la fonction nulle et la fonction $t \mapsto t^3$ sont deux solutions distinctes

De manière générale, on peut démonstrer qu'un problème de Cauchy non-linéaire

$$\begin{cases} u' = f(t, u(t)), \qquad t \in I \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

possède au moins une solution *locale* (cette à dire définie au moins sur un petit intervalle $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$, sous la seule hypothèse que f soit continue au voisinage de (t_0, u_0) (théorème de Peano).

On démontre aussi, sous la condition plus forte que f est de classe C^1 au voisinage de (t_0, u_0) qu'il y a existence et aussi unicité d'une solution locale. (Théorème de Cauchy-Lipschitz).

La démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz consiste d'abord à démontrer que le problème de Cauchy est équivalent à l'équation de Volterra non-linéaire

$$u'(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) \, \mathrm{d}s.$$

21. Si $f(t)$ est de la forme $P(t)e^{\lambda t}$, avec $P(t)$ polynôme, on cherchera une solution de la forme $Q(t)e^{\lambda t}$ avec $Q(t)$ polynôme du même degré que $P(t)$. Si $f(t)$ est de la forme $\sin(\lambda t)$, ou $\cos(\lambda t)$, on cherchera une solution de la forme $A\cos t + B\sin t$. Cette méthode ne fonctionne pas si la solution particulière que l'on cherche de l'équation avec second membre s'avère être une solution de l'équation homogène associée. Dans cette situation, on peut augmenter le degré du polynôme Q.

Séparation de variables. Certaines équations différentielles peuvent se résoudre en « séparant les variables ». Considérons par exemple le cas d'une équation différentielle de la forme

$$g(u(t))u'(t) = h(t).$$

Si G est une primitive de g et $H(t)$ est une primitive de h sur un même intervalle I, alors

$$G(u(t)) = H(t) + C, \qquad t \in I$$

et parfois à partir de cette équation on arrive à expliciter $u(t)$.

Les équations différentielless considérées dans les exemples précédents sont du type ci-dessus.

Exemple 3.16. Considérons l'équation $u'(t) = u(t)(1-u(t))$. Les fonctions constantes égales à 0 et 1 sont clairement des solutions. Si $u(t) \neq 0, 1$, alors la méthode précédente permet d'écrire $\ln |\frac{u(t)}{1-u(t)}| = t + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, et donc $u(t) = 1/(1 + ae^{-t})$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Équations homogènes. Les équations différentielles homogènes sont les équations de la forme

$$u'(t) = g(u(t)/t).$$

Ces équations se traitent en introduisant la nouvelle fonction inconnue $x(t) = u(t)/t$. On se ramène alors à l'équation différentielle à variables séparées

$$\frac{x'(t)}{g(x(t)) - x(t)} = \frac{1}{t}.$$

Exemple 3.17. L'équation différentielle $2tu'(t) = u(t)$. se ramène à une équation à variable séparables en posant $x(t) = u(t)/t$. La méthode précédente donne sur l'intervalle $]0, \infty[$ ou l'intervalle $]-\infty, 0[$, $u(t) = c\sqrt{|t|}$ avec $c \in \mathbb{R}$. La fonction nulle est aussi une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation.

4 Intégrales impropres

4.1 Intégrales impropres de type $\int_a^{+\infty}$

On traite seulement le cas des fonctions définies sur des intervalles de type $[a, +\infty[$. Le cas des fonctions sur des intervalles de type $]-\infty, b]$ est entièrement analogue.

Définition 4.1. *Soit $f\colon [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a, b]$, avec $b \geq a$.*

On dit que l'intérale impropre $\int_a^\infty f$ s'il existe finie la limite $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f$. Dans ce cas on pose $\int_a^\infty f := \lim_{b\to+\infty} \int_a^{+\infty} f$.

Exemple 4.1. $\int_a^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-a}$.

Remarque 4.2. Règle de Chasles.

Théorème 4.1 (Critères de comparaison. Critère des équivalents)**.** *Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur tout intervalle $[a, b]$, avec $b \geq a$.*

- *Si $0 \leq f \leq g$ sur $[a + \infty[$ et $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a +\infty f$ converge et $\int_a^{+\infty} f \leq \int_a^{+\infty} g$.*
- *...*
- *Si $f, g \geq 0$ sur $[a, +\infty[$ et si $f(x) \sim g(x)$ pour $x \to +\infty$, alors les intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.*

Dém. Posons $F(x) = \int_a^x f$ et $G(x) = \int_a^x g$. On a

$$F(x) \leq G(x).$$

De plus F et G sont croissantes et

$$\forall x \in [a, \infty[, \quad G(x) \leq \sup G = \lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_a^{+\infty} g.$$

Donc...

Pour la troisième affirmation, l'hypothèse implique que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un intervalle $[a', +\infty[$ (avec $a' \geq a$ dépendent de ϵ) tel que

$$f(x)(1-\epsilon) \leq g(x) \leq (1+\epsilon)f(x).$$

(En effet, la condition d'équivalent s'écrit $g(x) = f(x)(1 + \varepsilon(x))$, avec $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$). Il suffit alors d'appliquer, sur l'intervalle $[a', +\infty[$ les deux premières affirmations et conclure avec la règle de Chasles. □

Exemple 4.3. Le critère de Riemann : soit $a > 0$, l'intégrale impropre de Riemann $\int_a^\infty t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Intégrales impropres absolument convergentes. Rappelons tout d'abord que le critère de Cauchy suivant d'existence de la limite en $+\infty$ d'une fonction définie réelle F définie sur un intervalle $[a, +\infty[$.

$$\exists \lim_{x\to+\infty} F(x) \in \mathbb{R} \iff \forall \epsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \Big(x, x' > M \ \Rightarrow\ |F(x') - F(x)| < \epsilon\Big). \quad \text{(C)}$$

Démonstration. Pour l'implication "$\Leftarrow$", considérons une suite $x_n \to +\infty$. Soit $\epsilon > 0$ Il existe n_0 tel que, si $n, m \geq n_0$ alors $x_n \geq M$ et $x_m \geq M$ et donc $|F(x_n) - F(x_m)| < \epsilon$. Mais alors la suite $F(x_n)$ est de Cauchy et donc (d'après la complétude de $\mathbb{R}$) elle converge vers un réel ℓ.

Mais,

$$|F(x) - \ell| \leq |F(x) - F(x_{n_0})| + |F(x_{n_0}) - \ell|$$

et, si $x \geq M$, les deux termes sont inférieurs à ϵ. Par définition de limite, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \ell$.

L'implication "$\Rightarrow$" est juste une application de l'inégalité triangulaire $|F(x') - F(x)| \leq |F(x') - \ell| + |\ell - F(x)|$. $\square$

Définition 4.2. *On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+infty} f$ est absolument convergente si $\int_a^\infty |f|$ est convergente.*

Théorème 4.2. *Soit f une fonction Riemann-intégrables sur tout intervalle $[a, b]$, avec $b \geq a$. Si $\int_a^\infty |f|$ est convergente alors $\int_a^{+infty} f$ converge.*

Dém. Rappelons que si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ alors $|f|$ l'est aussi et $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$. Posons, pour $x \geq a$,

$$F(x) = \int_a^x f, \qquad \text{et} \qquad G(x) = \int_a^x |f|.$$

On a, pour $x', x \geq a$:

$$|F(x) - F(x')| = \left|\int_x^{x'} f\right| \leq \int_x^{x'} |f| = |G(x') - G(x)|.$$

Par l'hypothèse $\exists \lim_{x\to+\infty} G(x) = \int_a^{+\infty} g \in \mathbb{R}$. Donc G vérifie la condition de Cauchy (C) et par conséquent F aussi. Mais alors $\exists \lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_a^{+\infty} f \in \mathbb{R}$. $\square$

Le critère d'Abel. [22]

Théorème 4.3. *Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, décroissante, telle que $f \geq 0$ et* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $x \mapsto \int_a^x g$ soit bornée. Alors*

$$\int_a^\infty f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \textit{converge.}$$

Dém. Posons $G(x) = \int_a^x g$. Donc G est bornée par une constante $M > 0$ par l'hypothèse. On a, en intégrant par parties,

$$\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)G(t)]_a^x - \int_a^x f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t.$$

On a $\lim_{x\to+\infty}[f(t)G(t)]_a^x = 0$. De plus, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente comme on peut le voir par comparaison : en effet par comparaison, puisque $f' \leq 0$ et donc

$$|f'(t)|\,|G(t)| \leq -Mf'(t) \qquad \text{et} \qquad \int_a^{+\infty} -f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b\to+\infty}\big(f(a) - f(b)\big) = f(a).$$

Mais alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t.$$

$\square$

22. Non exigible à l'examen

Exemple 4.4. L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, d'après l'application du critère d'Abel. On peut démontrer (le faire) que cette intégrale n'est pas absolument convergente.

Exemple 4.5. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge. C'est une application du changement de variable $x = t^2$ et ensuite du critère d'Abel. Observer qu'une intégrale impropre peut converger, comme c'est le cas ici, sans que l'intégrande ne converge vers zéro.

4.2 Intégrales impropres de fonctions non bornées sur des intervalles finies

Pour les fonctions $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrables sur tout intervalle $[\alpha, b]$ avec $a < \alpha < b$, on peut définir l'intégrale impropre

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

à condition que cette limite existe finie. On dispose de critères de comparaisons, des équivalents, de convergence absolue analogues à ceux vu dans la section précédente.

4.3 Intégrales impropres en plusieurs points

Si $f\colon]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable sur tout intervalle de type $[\alpha, b]$ avec $a < \alpha < b$, alors l'intégrale (doublement) impropre

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

converge si et seulement si les deux intégrales impropres $\int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Ici $A > a$ est arbitraire. On pose alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^A f(t)\,\mathrm{d}t + \int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$