Université Claude Bernard Lyon 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex, France

Licence Sciences & Technologies
L3 Mathématiques pour l'enseignement
Partiel du 14 mars 2023

Séries et intégrales

La durée de totale de l'epreuve est d'1h30. Aucun document et aucune calculatrice ne sont autorisés durant l'épreuve. L'usage des téléphones est prohibé. La justification des réponses et un soin particulier de la présentation seront demandés et pris en compte lors de la notation.

Exercice 1.

1. Rappeler la définition de fonction uniformément continue.
2. Énoncer le théorème de Heine.
3. Démontrer que la fonction $x \mapsto x^{1/3}$ est uniformément continue sur $[-1, 1]$. Est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
4. Énoncer le critère de « non-continuité uniforme »
5. Démontrer, à l'aide du critère de « non-continuité uniforme », que la fonction $x \mapsto x^3$ n'est pas unifomément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Calculer la limite de la somme de Riemann $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 3.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 ne^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
2. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $0 < \delta \leq 1$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_\delta^1 ne^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 ne^{-nx} f(x)\,\mathrm{d}x$.
(Indication : écrire $f(x) = f(0) + f(x) - f(0)$ et se servir des deux premières questions).

Exercice 4. [Intégrabilité des fonctions continues] Soit $a < b$ et $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.

1. Donner la définition des sommes de Darboux $\Sigma^\Delta(f)$ et $\Sigma_\Delta(f)$ associées à une subdivision Δ de $[a,b]$.
2. On rappelle que f est Riemann intégrable si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une subdivision $\Delta = x_0, x_1, \ldots, x_n$ de l'intervalle $[a,b]$, telle que
$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) < \epsilon. \tag{*}$$
On suppose f continue. Soit $\epsilon > 0$. Expliquer comment construire une subdivision Δ de $[a,b]$ telle que $(*)$ est satisfaite. Retrouver le fait que toute fonction continue sur $[a,b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Exercice 5. Soit $E = C_b(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, normé par $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Pour $R > 0$, on note B_R la boule fermée de E, $B_R = \{f \in E\colon \|f\|_\infty \leq R\}$. Soit $T\colon E \to E$ l'application qui à la fonction f associe la fonction $T(f)$, où
$$\forall x \in \mathbb{R}\colon \quad T(f)(x) = f(x)^2 + \tfrac{3}{16}\sin x.$$

1. Pour quelles valeurs de $R > 0$ a-t-on $T\colon B_R \to B_R$?
2. Montrer qu'il existe $R' > 0$ tel que T est contractante sur $B_{R'}$.
3. Quels sont les deux points fixes dans E de l'application T ? Montrer que T possède un seul point fixe dans $B_{R'}$.