Université Claude Bernard | Licence de Mathématiques, L3

PROBABILITÉS – UE MAT3147L

Contrôle du 5 avril 2023
Durée : 1h30

Les calculatrices, téléphones, objets connectés, et les documents sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées et la rédaction (quantificateurs !) est prise en compte dans la notation.

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Barème indicatif : 1 point par question

Exercice 1. Soit λ un réel strictement positif. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda y} \mathbf{1}_{0 \leq x \leq y}$$

et on admet que f est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.

On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires dont la loi est donnée par

$$d\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y) = f(x,y)\ dx\ dy.$$

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$.
   On admet que l'on a aussi $\mathbb{P}(Y \geq 0) = 1$.
2. Montrer que X suit une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.
3. Déterminer la densité de la loi de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Montrer que, pour tout réel α de $[1, +\infty[$, on a $\mathbb{P}(\alpha X \leq Y) = \dfrac{1}{\alpha}$.
6. Montrer que, pour tout réel α de $[0, 1]$, on a $\mathbb{P}(\alpha X \leq Y) = 1$.
7. On note $Z = Y - X$. Déterminer la densité φ de la loi du couple (X, Z).
8. Montrer que X et Z sont indépendantes et déterminer la loi de Z.

Exercice 2.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes indépendantes et de loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $p = 1/2$. On rappelle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = 2^{-k-1}$.

On considère les variables aléatoires $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Montrer que, pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\mathbb{P}(U = k, V = \ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > \ell \\ 2^{-2k-2} & \text{si } k = \ell \\ 2^{-k-\ell-1} & \text{si } k < \ell \end{cases}$$

2. Calculer $\mathbb{P}(U = V)$.
3. Vérifier que $\mathbb{P}(V = 0) = 1/4$, puis montrer que, pour tout entier naturel non nul ℓ, on a

$$\mathbb{P}(V = \ell) = 2^{-\ell} - 3 \times 2^{-2\ell-2}.$$

4. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

5. Justifier que, pour tout $x \in]-1,1[$, on a $\sum_{\ell \geq 1} \ell x^\ell = \frac{x}{(1-x)^2}$.
6. Calculer, si elle existe, l'espérance de V.

Exercice 3. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$. On note, pour tout $n \geq 1$, $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [0,1]$, montrer que $\mathbb{P}(M_n \leq t) = t^n$ et en déduire la densité de la loi de (M_n).
2. Montrer que (M_n) converge en probabilité vers 1.
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|M_n - 1| \geq k^{-1})$.
4. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\{\forall N, \exists n \geq N \text{ tel que } |M_n - 1| \geq k^{-1}\}$ est de probabilité nulle.
5. Conclure que $(M_n)_n$ converge presque sûrement vers 1.
6. Justifier que $(n(1-M_n))_n$ converge en loi vers une loi exponentielle. *On pourra utiliser la fonction de répartition.*