

Chapitre 6

Changement de variables

6.1 C^1 difféomorphismes



Définition 1

Soient U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. On dit qu'une fonction $\phi : U \rightarrow V$ est un C^1 difféomorphisme si

- i) ϕ est bijective de U sur V ,
- ii) ϕ est de classe C^1 sur U ,
- iii) ϕ^{-1} est de classe C^1 sur V .



Proposition 1

La bijection réciproque d'un C^1 difféomorphisme est un C^1 difféomorphisme.



Proposition 2

La composée de deux C^1 difféomorphismes est un C^1 difféomorphisme.

On peut caractériser les difféomorphismes grâce au théorème d'inversion globale.

Avant de donner cette caractérisation, rappelons que pour toute fonction différentiable $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on définit en chaque point $x \in U$, la matrice jacobienne de ϕ en x , qu'on note $J_\phi(x)$ par

$$J_\phi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

où $\phi_1, \dots, \phi_n$ sont les applications coordonnées de ϕ . C'est donc la matrice $(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x))_{1 \leq i, j \leq n}$. Dans la suite, on

note $\text{Jac}_\phi(x) = \det J_\phi(x)$, le déterminant de la matrice jacobienne de ϕ en x , appelé Jacobien de ϕ en x .

★ Proposition 3

Soient U et V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$ et ϕ un C^1 difféomorphisme de U dans V . On a alors

$$\forall x \in U, \quad J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) = (J_\phi(x))^{-1}$$

et donc

$$\forall x \in U, \quad \text{Jac}_{\phi^{-1}}(\phi(x)) = \frac{1}{\text{Jac}_\phi(x)}.$$

Démonstration. On a $\phi \circ \phi^{-1} = \text{id}_V$ et $\phi^{-1} \circ \phi = \text{id}_U$.

On a alors d'après les propriétés de différentiation des fonctions composées ($J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$),

$$\begin{aligned} \forall x \in U, \quad I_n &= J_{\text{id}_V} \\ &= J_{\phi \circ \phi^{-1}}(\phi(x)) \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} &= J_\phi(\phi^{-1}(\phi(x))) \times J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) \\ &= J_\phi(x) \times J_{\phi^{-1}}(\phi(x)). \end{aligned} \tag{6.2}$$

De même,

$$\begin{aligned} \forall x \in U, \quad I_n &= J_{\text{id}_U} \\ &= J_{\phi^{-1} \circ \phi}(x) \\ &= J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) \times J_\phi(x). \end{aligned} \tag{6.3}$$

On déduit alors de (6.1) et (6.3) que

$$\forall x \in U, \quad J_{\phi^{-1}}(\phi(x)) = (J_\phi(x))^{-1}$$

et par suite

$$\forall x \in U, \quad \text{Jac}_{\phi^{-1}}(\phi(x)) = \frac{1}{\text{Jac}_\phi(x)}.$$

□

★ Théorème 1

(Théorème d'inversion globale : admis) Soit U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ une application injective et de classe C^1 (les dérivées partielles des ϕ_i , pour $i = 1, \dots, n$ existent et sont continues sur U) dont le Jacobien ne s'annule en aucun point de U . Alors $\phi(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et ϕ est un C^1 difféomorphisme de U sur $\phi(U)$.

6.1.1 Exemples de C^1 difféomorphismes

★ Proposition 4

(Coordonnées polaires) On considère les deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, $U = \{(r, \theta); r \in]0, +\infty[, \theta \in]-\pi, \pi[\} =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ et $V = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ ou } y \neq 0\}$.
Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow V \\ (r, \theta) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{aligned}$$

est un C^1 difféomorphisme de U dans V . On a en plus,

$$\forall (r, \theta) \in U, \text{Jac}_\phi(r, \theta) = r.$$

Démonstration. (Faire un dessin) La fonction ϕ est injective, même bijective de U dans V . En effet, soit $(x, y) \in V$ ($x > 0$, ou $y \neq 0$). S'il existe $(r, \theta) \in U$ tel que $(x, y) = \phi(r, \theta)$, on doit avoir $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Prenons donc $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ car $x > 0$ ou $y \neq 0$.

On a donc $(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}) \in \mathcal{C}(0, 1) \setminus \{(-1, 0)\}$. Il existe donc un unique $\theta \in]-\pi, \pi[$ tel que $\frac{x}{r} = \cos \theta$ et $\frac{y}{r} = \sin \theta$. Par suite, il existe un unique $(r, \theta) \in U$ tel que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ càd $(x, y) = \phi(r, \theta)$.

D'où ϕ est bijective.

D'autre part, ϕ est de classe C^1 sur l'ouvert U (les dérivées partielles de ϕ existent et sont continues sur U) (car ses fonctions composantes le sont, à vérifier). Sa matrice jacobienne en (r, θ) est

$$J_\phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

et $\text{Jac}_\phi(r, \theta) = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r > 0$ pour tout $(r, \theta) \in U$.

Donc, d'après le Théorème 1 d'inversion globale, ϕ est bien un C^1 difféomorphisme de U dans $\phi(U) = V$. $\square$

★ Proposition 5

(Coordonnées sphériques) On considère les deux ouverts de $\mathbb{R}^3$, $U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\} \times \mathbb{R})$.
Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow V \\ (r, \theta, \varphi) &\mapsto (r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi) \end{aligned}$$

est un C^1 difféomorphisme de U dans V . On a en plus,

$$\forall (r, \theta, \varphi) \in U, \text{Jac}_\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \varphi.$$

Démonstration. (Faire un dessin) La fonction ϕ est injective, même bijective de U dans V . En effet, soit $(x, y, z) \in V$ ($x > 0$, ou $y \neq 0$). Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\})$, d'après Proposition 4, il existe un unique $(r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ tel que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ ($r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$). .

Par ailleurs, comme $(\rho, z) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, alors en prenant $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} > 0$ car $\rho > 0$, $(\frac{\rho}{r}, \frac{z}{r}) \in \mathcal{C}(0, 1) \cap (]0, +\infty[\times \mathbb{R})$. Il existe donc un unique $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\frac{\rho}{r} = \cos \varphi$ et $\frac{z}{r} = \sin \varphi$.

Par suite, il existe un unique $(r, \theta, \varphi) \in U$ tel que $x = r \cos \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$ càd $(x, y, z) = \phi(r, \theta, \varphi)$.

D'où ϕ est bijective. D'autre part, ϕ est de classe C^1 sur U (car ses fonctions composantes le sont, à vérifier). Sa matrice jacobienne en (r, θ, φ) est

$$J_\phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

et $Jac_\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos \varphi \neq 0$ pour tout $(r, \theta, \varphi) \in U$.

Par suite, d'après le Théorème 1 d'inversion globale, ϕ est bien un C^1 difféomorphisme de U dans $\phi(U) = V$. $\square$

★ Proposition 6

(Coordonnées cylindriques) On considère les deux ouverts de $\mathbb{R}^3$, $U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$ et $V = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^- \times \{0\} \times \mathbb{R})$.

Alors l'application

$$\begin{aligned} \phi : U &\rightarrow V \\ (r, \theta, z) &\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{aligned}$$

est un C^1 difféomorphisme de U dans V . On a en plus,

$$\forall (r, \theta, z) \in U, \quad Jac_\phi(r, \theta, z) = r.$$

Démonstration. (Faire un dessin) Preuve évidente d'après Proposition 4. $\square$

6.2 Théorème de changement de variables et applications

On va énoncer maintenant le théorème de changement de variables, qui sera également très utile pour calculer des intégrales multiples :

★ Théorème 2

(Théorème de changement de variables : admis). Soient U et V deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$ et $\phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 . Alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\int_{\phi(U)} f(y) dy = \int_U f(\phi(x)) |Jac_\phi(x)| dx.$$

Pour le moment, nous n'avons vu que les définitions des intégrales doubles et triples sur des domaines "réguliers" dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, nous allons donc énoncer deux variantes de ce théorème de changement de variables dans le cas $n = 2, 3$.

★ Théorème 3

(Théorème de changement de variables dans $\mathbb{R}^2$: admis). Soient U et V deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^3$ et $\phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 . Soient A et $\phi(A)$ deux parties simples de $\mathbb{R}^2$. Alors pour toute fonction $f : \phi(A) \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\iint_{\phi(A)} f(x, y) dx dy = \iint_A f(\phi(u, v)) |Jac_\phi(u, v)| du dv.$$

Dans le cas $n = 3$,

★ Théorème 4

(Théorème de changement de variables dans $\mathbb{R}^3$: admis) Soient U et V deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^3$ et $\phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme de classe C^1 . Soient A et $\phi(A)$ deux parties de $\mathbb{R}^3$ décrites en "pile" ou "tranche" (voir Chapitre 5). Alors pour toute fonction $f : \phi(A) \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\iiint_{\phi(A)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_A f(\phi(u, v, w)) |Jac_\phi(u, v, w)| du dv dw.$$

6.2.1 Changements de variables usuels

On va introduire maintenant des changements de variables particulièrement utiles. En fonction des symétries du problème étudié, ces changements de variables peuvent permettre de considérablement simplifier l'expression des intégrales à calculer.

Coordonnées polaires

★ Théorème 5

(Intégrale en coordonnées polaires). Soient U un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ inclus dans $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[$ et $V = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); (r, \theta) \in U\}$. Alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\iint_V f(x, y) dx dy = \iint_U f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Démonstration. Le résultat de ce théorème est immédiat d'après Théorème 2 et Proposition 4. □

Ce changement de variable est agréable quand la frontière du domaine d'intégration s'exprime plus facilement comme courbe paramétrée en polaire et/ou que la fonction à intégrer présente une symétrie radiale :

★ Proposition 7

Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$ tel qu'il existe deux fonctions $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ continues, 2π périodiques, et vérifiant

$$A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); \theta \in \mathbb{R}, \rho_1(\theta) \leq r \leq \rho_2(\theta)\}.$$

Alors pour toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

On pourra également utiliser une variante de cette Proposition où θ ne couvre qu'une partie de l'intervalle $] -\pi, \pi[$.

Démonstration. On a $A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta); \theta \in [-\pi, \pi[, \rho_1(\theta) \leq r \leq \rho_2(\theta)\}$. Si on note

$$A' = \{(r \cos \theta, r \sin \theta), \theta \in]-\pi, \pi[, \rho_1(\theta) < r < \rho_2(\theta)\},$$

on a alors $\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{A'} f(x, y) dx dy$ (en décomposant A en $A_{[-\pi, 0]}$, $A_{[0, \pi]}$ qui sont des domaines simples et en utilisant le fait qu'on ne change pas la valeur d'une intégrale en enlevant des parties du bord).

Comme $\phi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ réalise un C^1 difféomorphisme de l'ouvert $\{(r, \theta), \theta \in]-\pi, \pi[, \rho_1(\theta) < r < \rho_2(\theta)\}$ dans l'ouvert A' (Proposition 4), on a alors d'après Théorème 2,

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \iint_{A'} f(x, y) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

□

Exemple :

Soit $a \in \mathbb{R}^2$. L'aire du disque ouvert $D(a, R) = a + D(0_{\mathbb{R}^2}, R)$ (resp. $\overline{D}(a, R)$ fermé) peut être obtenue par le calcul suivant :

$$\text{Aire}(D(a, R)) = \text{Aire}(D(0_{\mathbb{R}^2}, R)) = \iint_{D(0_{\mathbb{R}^2}, R)} 1 dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r dr d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R d\theta = \pi R^2.$$

Coordonnées cylindriques

Dans $\mathbb{R}^3$, les coordonnées cylindriques sont utiles lorsque le problème étudié présente une symétrie autour d'un axe :

★ Théorème 6

(Intégrale en coordonnées cylindriques). Soient U un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ inclus dans $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}$ et $V = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z); (r, \theta, z) \in U\}$. Alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

Démonstration. Le résultat de ce théorème est immédiat d'après Théorème 2 et Proposition 6. □

★ Proposition 8

Soient A une partie de $\mathbb{R}^3$ décrite en "pile" ou "tranche" et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continue tel qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et deux fonctions $\rho_1, \rho_2 : \mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow]0, +\infty[$ continues, 2π périodiques par rapport à la première variable, et vérifiant

$$A = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z); \theta \in \mathbb{R}, z \in [a, b], \rho_1(\theta, z) \leq r \leq \rho_2(\theta, z)\}.$$

Alors pour toute fonction $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\rho_1(\theta, z)}^{\rho_2(\theta, z)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz.$$

On pourra également utiliser une variante de cette Proposition où θ ne couvre qu'une partie de l'intervalle $] -\pi, \pi[$.

Démonstration. Pour $z \in [a, b]$, on note $T(z) = A \cap (\mathbb{R}^2 \times \{z\})$. Alors on a

$$T(z) = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z); \theta \in \mathbb{R}, \rho_1(\theta, z) \leq r \leq \rho_2(\theta, z)\}.$$

Comme

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left(\int_{T_z} f(x, y, z) dx dy \right) dz,$$

et

$$\iint_{T_z} f(x, y, z) dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\rho_1(\theta, z)}^{\rho_2(\theta, z)} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta$$

(passage en coordonnées polaires sur chaque tranche $T(z)$ en appliquant Proposition 7), on a alors le résultat. $\square$

Coordonnées sphériques

★ Théorème 7

(Intégrale en coordonnées sphériques). Soient U un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ inclus dans $]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $V = \{(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi); (r, \theta, \varphi) \in U\}$. Alors pour toute fonction $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ continue, on a

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U f(r \cos \theta \cos \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \varphi) r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi.$$

Démonstration. Le résultat de ce théorème est immédiat d'après Théorème 2 et Proposition 5. $\square$

🔍 Exemple :

Soit $a \in \mathbb{R}^3$. Le volume de la boule ouverte $B_2(a, R) = a + B_2(0_{\mathbb{R}^3}, R)$ (resp. $\overline{B}(a, R)$ fermée) peut être obtenu par le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_2(a, R)) &= \text{Vol}(B_2(0_{\mathbb{R}^3}, R)) \\ &= \iiint_{B_2(0_{\mathbb{R}^3}, R)} dx dy dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^R r^2 \cos \varphi dr d\theta d\varphi \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \right) \left(\int_0^R r^2 dr \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) \\ &= 2\pi \times \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \times [\sin \varphi]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \times \frac{R^3}{3} \times 2 \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$