Chapitre 4

Intégrales à paramètres

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Il s'agit dans ce chapitre de mettre en place les outils permettant d'étudier les fonctions définies par des intégrales.
Il y a en effet en analyse de nombreuses occasions de définir une fonction par une intégrale, qu'on appelle aussi intégrale à paramètre (le paramètre étant la variable dont dépend la fonction considérée).
Par exemple, on peut considérer la fonction Γ : elle est définie (on verra ça à la fin du chapitre) pour tout $x > 0$, par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

4.1 Continuité des intégrales à paramètres

Théorème 1

(Continuité des intégrales à paramètres) Soit I, J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que :

i) $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
ii) $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I,
iii) (hypothèse de domination) il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est bien définie et continue sur I.

Démonstration. Pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J d'après (i) et d'après (iii), son module est majoré sur J par la fonction φ continue et intégrable sur J. Par suite, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J et donc F est bien définie sur I (pour tout $x \in I$, $F(x) \in \mathbb{K}$).
Montrons que F est continue sur I.
Soit $a \in I$. Montrons que F est continue en a. Pour cela, il suffit de montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de I qui converge vers a, alors la suite $(F(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(a)$.
Soit donc $(x_n)_n$ une suite d'éléments de I qui converge vers a. Notons f_n la fonction définie sur J qui à tout $t \in J$ associe $f_n(t) = f(x_n, t)$. On a

a. $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux,

b. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur J vers la fonction $h : t \mapsto f(a,t)$ continue par morceaux d'après (i).
En effet, pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I d'après ii). Comme $\lim\limits_n x_n = a$, on déduit que $\lim\limits_n f_n(t) = \lim\limits_n f(x_n,t) = f(a,t) = h(t)$.

c. D'après (iii), il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur J tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in J, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

Par suite, d'après le théorème de convergence dominée du Chapitre 1, la suite $(F(x_n))_n = \left(\int_J f_n(t))dt\right)_n$ converge et a pour limite $\int_J f(a,t)dt = F(a)$. D'où F est continue en a pour tout $a \in I$ et donc F est continue sur I. □

Exercice 1

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2}dt$. Montrer que F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 1 :

Pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, posons $f(x,t) = sin(xt)e^{-t^2}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$.
On a :

i) $\forall x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$ car les fonctions sinus et exponentielle sont continues sur $\mathbb{R}$,

ii) $\forall t \in [0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car la fonction sinus l'est sur $\mathbb{R}$,

iii) $\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,+\infty[$, $|f(x,t)| = |\sin(xt)|e^{-t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$. De plus, la fonction φ est continue (par morceaux) sur $[0,+\infty[$ car exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto -t^2$ l'est aussi.
Montrons que φ est intégrable sur $[0,+\infty[$. En effet, φ est continue sur $[0,+\infty[$ donc intégrable sur tout segment $[0,b] \subset [0,+\infty[$ et au voisinage de $+\infty$, $\varphi(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ par croissance comparée. Comme $\frac{1}{t^2}$ est inégrable au voisinage de $+\infty$ (intégrale de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$), on déduit que φ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et par suite sur $[0,+\infty[$.

Par suite, d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Pour $x \geq 1$, on pose $F(x) = \int_0^{\pi} \sqrt{x+\cos t}dt$. Montrer que F est bien définie et continue sur $[1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 2 :

Pour $(x,t) \in [1,+\infty[\times[0,\pi]$, posons $f(x,t) = \sqrt{x+\cos t}$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$.
On

i) $\forall x \in [1,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0,\pi]$ car cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$,

ii) $\forall t \in [0,\pi]$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[1,+\infty[$ car $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $x \geq 1$ ($x+\cos t \geq 0$ pour tout $t \in [0,\pi]$) ,

iii) Soit $A > 1$. On a $\forall (x,t) \in [1, A] \times [0, +\infty[$, $|f(x,t)| = \sqrt{x + \cos t} \leq \sqrt{A + \cos t} = \varphi_A(t)$. De plus, la fonction φ_A est continue sur le segment $[0, \pi]$ (car cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ et $u \mapsto \sqrt{u}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$) et donc intégrable sur le segment $[0, \pi]$.

Par suite, d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres, la fonction F est bien définie et continue sur $[1, A]$, $\forall A > 1$ et donc définie et continue sur $\bigcup_{A>1} [1, A] = [1, +\infty[$.

Le Théorème 1 dit que $\lim_{x \to a} \int_J f(x,t)dt = \int_J \lim_{x \to a} f(x,t)dt$ quand $a \in I$. Ce théorème se généralise au cas où a est adhérent au domaine, a réel ou infini :

Théorème 2

(Passage à la limite sous le signe intégrale) Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$.
Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit a un point adhérent à I ou $a = +\infty$ si I n'est pas majorée ou $a = -\infty$ si I n'est pas minorée.
On suppose que :

i) $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J,

ii) $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ admet une limite $l(t)$ quand x tend vers a et de plus la fonction l est continue par morceaux sur J,

iii) (hypothèse de domination) il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur J telle que
$$\forall (x,t) \in I \times J, \ |f(x,t)| \leq \varphi(t).$$

Alors, la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)dt$ admet une limite en a et
$$\lim_{x \to a} \int_J f(x,t)dt = \int_J \lim_{x \to a} f(x,t)dt = \int_J l(t)dt.$$

Démonstration. 1. Si a est réel, pour $(x,t) \in (I \cup \{a\}) \times J$, posons $g(x,t) = f(x,t)$ si $x \in I$ et $g(a,t) = l(t)$. La fonction g vérifie les hypothèses du Théorème 1 sur $(I \cup \{a\}) \times J$.
En effet,

a) $\forall x \in I \cup \{a\}$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur J car si $x \in I$, cette application n'est autre que $t \mapsto f(x,t)$ continue par morceaux par hypothèse (d'après i)) et si $x = a$, cette application n'est autre que $t \mapsto l(t)$ et l est continue par morceaux par hypothèse (d'après ii)).

b) $\forall t \in J$, la fonction
$$x \mapsto g(x,t) = \begin{cases} f(x,t) & \text{si } x \in I, \\ l(t) & \text{si } x = a \end{cases}$$
est continue sur $I \cup \{a\}$ car $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I et $\lim_{x \to a} g(x,t) = \lim_{x \to a} f(x,t) = l(t) = g(a,t)$.

c) $\forall (x,t) \in (I \cup \{a\}) \times J$,
$$|g(x,t)| = \begin{cases} |f(x,t)| & \text{si } x \in I, \\ |l(t)| & \text{si } x = a \end{cases} \leq \varphi(t)$$
car $\forall (x,t) \in I \times J$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ par hypothèse (d'après iii)) et donc on a aussi
$$\lim_{x \to a} |f(x,t)| = |\lim_{x \to a} f(x,t)| = |l(t)| \leq \varphi(t).$$
On a de plus d'après iii) que la fonction φ est continue par morceaux et intégrable sur J.

Par suite, d'après le Théorème 1, la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_J g(x,t)dt$ est continue sur $I \cup \{a\}$ et en particulier donc en a. Ceci montre que

$$\lim_{x \to a} \int_J g(x,t)dt = G(a) = \int_J l(t)dt = \int_J \lim_{x \to a} g(x,t)dt.$$

2. Si $a = +\infty$ (respectivement $a = -\infty$), on applique le résultat précédent à la fonction $(x,t) \mapsto f(\frac{1}{x}, t)$ en 0 à droite (respectivement à gauche).

□

Exercice 3

Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt.$

Démonstration. Soit $x > 0$. La fonction $f_x : t \mapsto e^{-x^2t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc intégrable sur tout segment $[0, b] \subset [0, +\infty[$ et $0 \leq f_x(t) \underset{+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$ par croissance comparée. Comme $\frac{1}{t^2}$ est inégrable au voisinage de $+\infty$ (intégrale de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$), on déduit que f_x est intégrable au voisinage de $+\infty$ et par suite sur $[0, +\infty[$.
Donc la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt$ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
Pour tout $(x,t) \in [1, +\infty[\times [0, +\infty[$, posons $f(x,t) = e^{-x^2t^2}$ de sorte que pour tout $x \geq 1$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,t)dt$. On a alors :

i) $\forall x \in [1, +\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$ car exponentielle et $u \mapsto u^2$ sont continues sur $\mathbb{R}$,

ii) $\forall t \in [0, +\infty[$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ adme une limite $l(t)$ quand $x \to +\infty$ avec $l(t) = 0$ si $t > 0$ et $l(t) = 1$ si $t = 0$, et la fonction l est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$ (continue partout sauf en 0),

iii) pour tout $x \geq 1$, $|f(x,t)| = e^{-x^2t^2} \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$ avec la fonction φ continue (par morceaux) sur $[0, +\infty[$ car exponentielle l'est et intégrable sur $[0, +\infty[$ (à vérifier).

Par suite, d'après le Théorème 2, F admet une limite quand $x \to +\infty$ et on a :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2t^2}dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2t^2}dt = \int_0^{+\infty} l(t)dt = \int_0^{+\infty} 0dt = 0.$$

Remarque : On aurait pu montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = 0$ pour tout suite $(x_n)_n$ tel que $\lim_n x_n = +\infty$ en appliquant le théorème de convergence dominée à la suite $(f_n)_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto f(x_n, t)$ (comme $\lim_n x_n = +\infty$, on peut supposer $x_n \geq 1$ pour tout n). □

4.2 Dérivabilité des intégrales à paramètres

Théorème 3
(Dérivabilité d'une intégrale à paramètre)
Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

i) $\forall x\in I$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,
ii) f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable x en tout point de $I\times J$,
iii) $\forall x\in I$, la fonction $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,
iv) $\forall t\in J$, la fonction $x\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I,
v) il existe une fonction $\psi : J\to\mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t)\in I\times J,\quad |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)|\leq \psi(t).$$

Alors la fonction $F : x\mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est bien définie et de classe C^1 sur I et on a

$$\forall x\in I,\quad F'(x)=\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Démonstration. D'après (i), puisque $\forall x\in I$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J, la fonction F est bien définie sur I. Soit $a\in I$. Posons $\forall (x,t)\in I\times J$

$$g_a(x,t)=\begin{cases}\dfrac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a} & \text{si } x\neq a,\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t) & \text{si } x=a\end{cases}$$

Notons que pour $x\neq a$, $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}=\displaystyle\int_J g_a(x,t)dt$. On va appliquer le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres à g_a.

a) $\forall x\in I$, la fonction $t\mapsto g_a(x,t)$ est continue par morceaux sur J (y compris pour $x=a$) d'après i) et iii).
b) $\forall t\in J$, la fonction $x\mapsto g_a(x,t)$ est continue sur I d'après ii) et iv) (y compris en $x=a$ car par définition de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)$, $g_a(x,t)=\dfrac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}\underset{x\to a}{\to}\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)=g_a(t)$),
c) Soit $(x,t)\in I\times J$. D'après l'inégalité des accroissements finis et v),

$$|g_a(x,t)|=\begin{cases}\left|\dfrac{f(x,t)-f(a,t)}{x-a}\right| & \text{si } x\neq a,\\ |\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,t)| & \text{si } x=a\end{cases}\quad\leq \sup_{u\in I}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(u,t)\right|\leq\psi(t).$$

Par suite, d'après le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres, la fonction $G : x\mapsto \displaystyle\int_J g_a(x,t)dt$ est continue sur I et donc en particulier en a. On en déduit que le taux $\dfrac{F(x)-F(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a et donc que F est dérivable en a, avec

$$F'(a)=\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\int_J g_a(x,t)dt=\int_J g_a(a,t)dt=\int_J\frac{\partial f}{\partial x}(a,t)dt.$$

Ainsi, F est dérivable en a, $\forall a \in I$, donc sur I et sa dérivée s'obtient par la dérivation sous le signe intégrale. Enfin, toujours d'aprés le Théorème 1 de continuité des intégrales à paramètres appliqué cette fois ci à la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (à vérifier les hypothèses), la fonction $F' : x \mapsto \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$ est continue sur I et donc F est de classe C^1 sur I. $\square$

Corollaire 1

Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

i) $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,

ii) f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable x en tout point de $I \times J$,

iii) $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,

iv) $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I,

v) $\forall [a,b]$ segment de I, il existe une fonction $\psi_{a,b} : J \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \quad |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \psi_{ab}(t).$$

Alors la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_X f(x,t)d\mu(x)$ est définie et de classe C^1 sur I et on a

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Si on redérive $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ (qui est une fonction de deux variables) par rapport à sa première variable x, on obtient une fonction notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (fonction dérivée partielle seconde de f par rapport à x) et si on recommence, on obtient plus généralement $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ (fonction dérivée partielle k-ème de f par rapport à x).
Par récurrence, on en déduit du Théorème 3, le théorème plus général suivant :

Théorème 4

(Dérivabilité d'une intégrale à paramètre généralisé)
Soient I et J deux intervalles non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction déinie sur $I \times J$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que

i) $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,

ii) f admet des dérivées partielles successives par rapport à sa première variable x jusqu'à l'ordre $n \geq 1$ (respectivement à tout ordre) en tout point de $I \times J$,

iii) $\forall k = 1,...,n$ (resp. $\forall k \in \mathbb{N}^*$), $\forall x \in I$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J,

iv) $\forall k = 1,...,n$ (resp. $\forall k \in \mathbb{N}^*$,), $\forall t \in J$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue sur I,

v) $\forall k = 1,...,n$ (resp. $\forall k \in \mathbb{N}^*$), il existe une fonction $\psi_k : J \to \mathbb{R}^+$, continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \psi_k(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)dt$ est définie et de classe C^n (resp. C^∞) sur I et on a

$$\forall k = 1,...,n \ \ (\text{resp. } \ \forall k \in \mathbb{N}^*), \ \forall x \in I, \quad F^{(k)}(x) = \int_J \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt.$$

Exercice 4

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Quel est le domaine de définition de Γ ?
2. (a) Pour $k \geq 1$ et $0 < A < B < +\infty$, on pose

$$g_k(t) = \begin{cases} t^{A-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } 0 < t < 1 \\ t^{B-1} e^{-t} |\ln t|^k & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

   Démontrer que g_k est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   (b) En déduire que Γ est $\mathcal{C}^\infty$ sur son domaine de définition, et calculer $\Gamma^{(k)}$.
3. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire $\Gamma(n+1)$ pour n un entier et un équivalent de Γ en 0.
4. Montrer que Γ est convexe.