Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de Printemps 2022–2023**

L2 — UE : Analyse 4

Contrôle Partiel n°2 du 31/03/2023

CORRECTION

Aucun document ou dispositif électronique n'est autorisé pendant l'épreuve.

Les réponses doivent toutes être soigneusement justifiées.

Exercice 1 Question de cours (3 points)

Énoncer et démontrer la proposition sur la différentiabilité du produit de deux applications différentiables.

Correction.

Enoncé : Soit $O \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : O \mapsto \mathbb{R}$ et $g : O \mapsto \mathbb{R}$. Si f et g sont différentiables, alors fg est différentiable et, pour tout $x \in O$, on a

$$D_x(fg) = g(x)D_xf + f(x)D_xg.$$

Démonstration : On considère l'application bilinéaire $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = xy.$$

L'application φ est bilinéaire, donc différentiable, et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$D_{(x,y)}\varphi(h, k) = hy + xk.$$

Considérons maintenant l'application $u : O \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout $x \in O$ par

$$u(x) = (f(x), g(x)).$$

Alors u est différentiable car f et g le sont, et on a, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$D_xu(h) = (D_xf(h), D_xg(h)).$$

On remarque maintenant que l'application $p : O \to \mathbb{R}$ définie par

$$p(x) = f(x)g(x)$$

vérifie $p = \varphi \circ u$. C'est une application différentiable comme composée d'applications différentiables et sa différentielle en $x \in O$ est donc

$$D_xp = D_{(f(x),g(x))}\varphi \circ D_xu = D_{(f(x),g(x))}\varphi \circ (D_xf, D_xg),$$

et on obtient ainsi $D_x(fg) = g(x)D_xf + f(x)D_xg$.

Exercice 2 Continuité et différentiabilité d'une fonction à paramètre (9 points)

Soit $\alpha \in [0, +\infty[$ et $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha + |y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Partie I - Continuité

I.1 Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, on a

$$|f_\alpha(x,y)| \leqslant 2\|(x,y)\|_2^{\alpha-2}.$$

Correction. (1.5 points) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. On utilise le fait que $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$ et on trouve que

$$|f_\alpha(x,y)| \leqslant \frac{\sqrt{x^2+y^2}^\alpha + \sqrt{x^2+y^2}^\alpha}{x^2+y^2} = 2(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}-1} = 2\|(x,y)\|_2^{\alpha-2}.$$

I.2 Montrer que si $\alpha > 2$, alors f_α est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Correction. (1 point) Si $\alpha > 2$, alors $\alpha - 2 > 0$ et ainsi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2\|(x,y)\|_2^{\alpha-2} = 0,$$

ce qui implique que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_\alpha(x,y) = 0 = f_\alpha(0,0)$, donc f_α est continue en $(0,0)$. De plus, sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, f_α est continue comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il en résulte que f_α est continue sur $\mathbb{R}^2$ quand $\alpha > 2$.

I.3 Montrer que si $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, alors f_α n'est pas continue au point $(0,0)$.

Correction. (1.5 points) Si $\alpha = 2$, alors on a $f_2(x,x) = \dfrac{2x^2}{2x^2} = 1$ qui ne tend donc pas vers 0 quand $x \to 0$, donc f_2 n'est pas continue en $(0,0)$.

Soit $\alpha \in [0,2[$ et $x \neq 0$, alors

$$f_\alpha(x,x) = \frac{2|x|^\alpha}{x^2} = 2|x|^{\alpha-2} \to +\infty$$

quand $x \to 0$ car $\alpha - 2 < 0$. On en déduit donc que f_α n'est pas continue en $(0,0)$.

Partie II - Différentiabilité

II.1 Justifier que f_α n'est pas différentiable en $(0,0)$ lorsque $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

Correction. (0.5 point) Si $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$, alors f_α n'est pas continue en $(0,0)$, donc non-différentiable en $(0,0)$.

II.2 Montrer que si $\alpha > 3$, alors f_α admet des dérivées partielles en $(0,0)$ dont on donnera les valeurs.

Correction. (1.5 points) Soit $\alpha > 3$, alors on a

$$\frac{f_\alpha(h,0) - f_\alpha(0,0)}{h} = \frac{|h|^\alpha}{h^3} \to 0 \quad \text{quand } h \to 0.$$

Donc $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0. Comme $f_\alpha(x,y) = f_\alpha(y,x)$ pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on en déduit que $\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut aussi 0.

II.3 Montrer que f_α est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $\alpha > 3$.

Correction. (3 points) On commence par remarquer que si $\alpha \leqslant 3$, alors on a deux cas :

- Si $\alpha = 3$, alors $\dfrac{f_3(0,h) - f_3(0,0)}{h} = \dfrac{|h|^3}{h^3} = \pm 1$ en fonction du signe de h, donc la dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à y n'existe pas, donc f_3 n'est pas différentiable en $(0,0)$.
- Si $\alpha < 3$, alors la limite de $\dfrac{f_\alpha(0,h) - f_\alpha(0,0)}{h} = \dfrac{|h|^\alpha}{h^3}$ existe seulement si h tend vers 0^+ ou 0^-, mais pas dans le cas général $h \to 0$. Ainsi, la dérivée partielle en $(0,0)$ par rapport à y n'existe pas, donc f_α n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Réciproquement, si $\alpha > 3$, alors, si la différentielle de f_α en $(0,0)$ existe, elle est donc nulle (car les dérivées partielles en $(0,0)$ le sont). Calculons maintenant, pour $(h_1,h_2) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned}
\frac{|f_\alpha(h_1,h_2) - f_\alpha(0,0) - 0|}{\|(h_1,h_2)\|_2} &= \frac{|f_\alpha(h_1,h_2)|}{\|(h_1,h_2)\|_2} \\
&= \frac{|h_1|^\alpha + |h_2|^\alpha}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\leqslant \frac{2(h_1^2+h_2^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\
&\leqslant 2(h_1^2+h_2^2)^{\frac{\alpha-3}{2}} \to 0,
\end{aligned}$$

quand $(h_1,h_2) \to (0,0)$, car $\alpha > 3$. On en déduit donc que

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0) \\ (h_1,h_2)\neq(0,0)}} \frac{|f_\alpha(h_1,h_2) - f_\alpha(0,0) - 0|}{\|(h_1,h_2)\|_2} = 0,$$

donc f_α est différentiable en $(0,0)$ et $D_{(0,0)} f_\alpha = 0$.

Exercice 3 Fonction höldérienne (4 points)

Soit $\beta > 0$. On dit que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est β-höldérienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\|F(x) - F(y)\|_2 \leqslant C\|x-y\|_2^\beta$.

1. Montrer que, pour tout $\beta > 0$, toute fonction β-höldérienne est continue.

   Correction. (2 points) Soit $\beta > 0$, soit F une application β-holdérienne et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Soit $\varepsilon > 0$, alors pour $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{C}\right)^{\frac{1}{\beta}}$ on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

   $$\|x - x_0\|_2 < \delta \Rightarrow \|F(x) - F(x_0)\|_2 \leqslant C\|x-x_0\|_2^\beta < C\delta^\beta = \varepsilon,$$

   donc F est continue en x_0, et ainsi F est continue sur $\mathbb{R}^n$.

2. Soit $\beta > 1$, montrer que la différentielle d'une fonction β-höldérienne est nulle en tout point.

   Correction. (2 points) Soit $\beta > 1$, soit F une application β-holdérienne et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{R}^n \backslash \{(0,0)\}$, on a

   $$\frac{\|F(x_0+h) - F(x_0)\|_2}{\|h\|_2} \leqslant \frac{C\|x_0+h-x_0\|_2^\beta}{\|h\|_2} = C\|h\|_2^{\beta-1} \to 0$$

   quand $h \to 0$, car $\beta - 1 > 0$. On en déduit que F est différentiable en x_0 et que $D_{x_0}F = 0$.

Exercice 4 Dérivées partielles d'une composée (4 points)

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application différentiable. On considère l'application $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, que l'on admet être différentiable, définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(x, y) = g\left(\sin(xy), x + 2y^2\right)$$

1. Déterminer les dérivées partielles de ϕ au point $(0, 1)$ en fonction des dérivées partielles de g en un point que l'on explicitera.

   Correction. (2.5 points) Comme ϕ est différentiable, elle admet des dérivées partielles. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient par composition :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = y\cos(xy)\partial_1 g\left(\sin(xy), x + 2y^2\right) + \partial_2 g\left(\sin(xy), x + 2y^2\right)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = x\cos(xy)\partial_1 g\left(\sin(xy), x + 2y^2\right) + 4y\partial_2 g\left(\sin(xy), x + 2y^2\right).$$

   Ainsi, au point $(0, 1)$, on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(0, 1) = \partial_1 g\,(0, 2) + \partial_2 g\,(0, 2) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(0, 1) = 4\partial_2 g\,(0, 2)$$

2. Donner l'expression de la différentielle de ϕ au point $(0, 1)$.

   Correction. (1.5 point) La différentielle de ϕ au point $(0, 1)$, $D_{(0,1)}\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, est donc donnée, pour tout $(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, par

$$D_{(0,1)}\phi(h_1, h_2) = \left(\partial_1 g\,(0, 2) + \partial_2 g\,(0, 2)\right) h_1 + 4\partial_2 g\,(0, 2)\, h_2.$$