

Correction du CC1:

● Questions de cours:

① 1) la norme associée à φ est

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto \sqrt{\varphi(x,x)}$$

① 2) $F^\perp = \{ x \in E / \forall y \in F, \varphi(x,y) = 0 \}$.

Exercice 1:

① 1) 0_E est l'application nulle sur $[0;1]$. On a

● $0_E(0) = 0_E(1) = 0$ donc $0_E \in F$.

Soit $(f,g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{cases} (f + \lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0) = 0 \\ (f + \lambda g)(1) = f(1) + \lambda g(1) = 0 \end{cases}$$

Donc $f + \lambda g \in F$. Ainsi: F est un sous-espace de E .

2) Soit $(f,g,h) \in F^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(f + \lambda g, h) &= - \int_0^1 ((f + \lambda g)(x) h''(x) + (f + \lambda g)''(x) h(x)) dx \\ &= - \int_0^1 (f(x) + \lambda g(x)) h''(x) + (f''(x) + \lambda g''(x)) h(x) dx \\ &= - \int_0^1 (f(x) h''(x) + f''(x) h(x)) dx - \lambda \int_0^1 (g(x) h''(x) + g''(x) h(x)) dx \\ &= \varphi(f, h) + \lambda \varphi(g, h). \end{aligned}$$

① Donc φ est linéaire à gauche.

$$\begin{aligned} \text{On a } \varphi(f, h) &= - \int_0^1 (f(x) h''(x) + f''(x) h(x)) dx \\ &= - \int_0^1 (h''(x) f(x) + h''(x) f(x)) dx \\ &= \varphi(h, f). \end{aligned}$$

① donc φ est symétrique et φ est bilinéaire.

$$\begin{aligned} \text{On a } \varphi(f, f) &= -2 \int_0^1 f''(x) f(x) dx \\ &= -2 \left([f'(x) f(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)^2 dx \right) \\ &= 2 \int_0^1 f'(x)^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

① car $f(0) = f(1) = 0$. Donc φ est positive.

Soit f dans F telle que $\varphi(f, f) = 0$. Alors $\int_0^1 f'(x)^2 dx = 0$. Comme $(f')^2$ est positive et continue sur $[0, 1]$, on obtient que $f'(x)^2 = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Donc $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et f est constante sur $[0, 1]$. Comme $f(0) = 0$, on obtient que $f = 0_{[0, 1]}$.

② Donc φ est définie, c'est un produit scalaire sur F .

Exercice 2:

1) Comme \mathbb{R}^3 est de dimension finie, on a

①
$$\mathbb{R}^3 = F \oplus F^\perp$$

donc $\dim F^\perp = 3 - \dim F = 3 - 1 = 2$.

$$\text{On } \begin{cases} \langle (1, 2, 1), (2, 1, 0) \rangle = 0 \\ \langle (1, 2, 1), (1, 0, -1) \rangle = 0 \end{cases}$$

Donc $\text{Vect}((2, 1, 0), (1, 0, -1)) \subset F^\perp$.

Comme $(2, 1, 0)$ et $(1, 0, -1)$ ne sont pas colinéaires, on a $\text{Vect}((2, 1, 0), (1, 0, -1)) = F^\perp$.

③ 2) Soit $u_2 = (2, 1, 0)$ et $e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (2, 1, 0)$

Par le procédé de Gram-Schmidt, on pose

$$\begin{aligned} u_2 &= (1, 0, -1) - \text{Pr}_{e_1}((1, 0, -1)) \\ &= (1, 0, -1) - \langle (1, 0, -1), e_1 \rangle e_1 \\ &= (1, 0, -1) - \frac{1}{5} \langle (1, 0, -1), (2, 1, 0) \rangle (2, 1, 0) \\ &= (1, 0, -1) - \frac{2}{5} (2, 1, 0) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, -1\right)$$

$$= \frac{1}{5} (1, -2, -5)$$

On note $e_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} (1, -2, -5)$

Alors (e_1, e_2) est une base orthonormée de F^\perp .

② 3) On a $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z), (1, -2, 1) \rangle = 0\}$
 $= F^\perp$.

Comme \mathbb{R}^3 est de dimension finie, on a
 $G^\perp = (F^\perp)^\perp = F$.

Exercice 3:

On considère le \mathbb{R} -espace vectoriel $E = C([0, 1]; \mathbb{R})$
 muni du produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

② $(f, g) \longmapsto \int_0^1 f(t) g(t) dt$

Soit $(m, p) \in \mathbb{N}^2$ et notons

$$g_m : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g_p : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto t^m \sqrt{f(t)}$$

$$t \longmapsto t^p \sqrt{f(t)}$$

qui sont bien définies car f est à valeurs positives
 ou nulles sur $[0, 1]$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz
 donne

$$\langle g_m, g_p \rangle^2 \leq \langle g_m, g_m \rangle \langle g_p, g_p \rangle$$

② $\Leftrightarrow \left(\int_0^1 t^{m+p} f(t) dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 t^{2m} f(t) dt \right) \left(\int_0^1 t^{2p} f(t) dt \right)$

car $(\sqrt{f(t)})^2 = f(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

On a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$

tel que $g_m = \lambda g_p$.

S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g_m = \lambda g_p$, alors

$$\forall t \in [0, 1], \quad t^m \sqrt{f(t)} = \lambda t^p \sqrt{f(t)}$$

Si f n'est pas identiquement nulle, alors (~~et on~~),
comme f est continue sur $[0, 1]$, il existe un intervalle
ouvert non vide $I \subset [0, 1]$ tel que $\forall \epsilon \in I, f(\epsilon) \neq 0$.

Donc $\forall \epsilon \in I, \epsilon^m = d\epsilon^p$.

Le polynôme $\epsilon^m - d\epsilon^p$ a une infinité de racines
(tant ϵ dans I) donc est nul : on a $m=p$ et $d=1$.

Réciproquement, si f est identiquement nulle ou si
 $m=p$ et $d=1$, alors on a bien

$$\textcircled{2} \quad \left(\int_0^1 \epsilon^{m+1} f(\epsilon) d\epsilon \right)^2 = \left(\int_0^1 \epsilon^{2m} f(\epsilon) d\epsilon \right) \left(\int_0^1 \epsilon^{2p} f(\epsilon) d\epsilon \right)$$