Algèbre 4 - Cours 5
Groupe orthogonal

Printemps 2023

Table des matières

1 Groupe orthogonal (fin)

Remarque. On verra que si $f \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det(f) = \pm 1$.

Définition 1.1. On note $\mathrm{SO}(E)$ (noté aussi $\mathcal{O}^+(E)$) l'ensemble des $f \in \mathcal{O}(E)$ tels que $\det(f) = 1$. On note $\mathcal{O}^-(E) = \mathcal{O}(E) \setminus \mathrm{SO}(E)$.

Remarque. $\mathcal{O}^-(E) = \{f \in \mathcal{O}(E) \mid \det(f) = -1\}$ et $\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}^+(E) \sqcup \mathcal{O}^-(E)$ (union disjointe).

Proposition 1.2. $\mathrm{SO}(E)$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{O}(E)$ *appelé groupe spécial orthogonal.*

Démonstration. $\mathrm{Id} \in \mathrm{SO}(E)$ puisque $\det(Id) = 1$. De plus si $u, v \in \mathrm{SO}(E)$, alors $\det(u \circ v) = \det(u)\det(v) = 1$, donc $u \circ v \in \mathrm{SO}(E)$. De même $\det(u^{-1}) = 1/\det(u) = 1$, donc $u^{-1} \in \mathrm{SO}(E)$. $\square$

2 Matrices orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Le but est maintenant d'étudier la représentation matricielle d'un opérateur orthogonal. Pour cela, on va introduire la notion de matrice orthogonale.

Proposition 2.1. *Soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*. S'équivalent*

(i) ${}^tMM = I_n$

(ii) $M{}^tM = I_n$

(iii) M *est inversible et* $M^{-1} = {}^tM$,

(iv) les colonnes de M *forment une famille (base) orthonormée de* $\mathbb{R}^n$ *(pour le produit scalaire usuel),*

(v) les lignes de M *forment une famille (base) orthonormée de* $\mathbb{R}^n$ *(pour le produit scalaire usuel).*

Sous ces conditions on dit que M *est une matrice* orthogonale*.*

Définition 2.2. On note

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$$

l'ensemble des matrices orthogonales, appelé groupe orthogonal. On note aussi

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det M = 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det M = -1\};$$

$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ (parfois noté $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$) est appelé groupe spécial orthogonal.

Remarque. On a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \sqcup \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

Démonstration de la Proposition 2.1. (i) $\Leftrightarrow$ (iv). Ecrivons $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ et notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de M. Le terme d'indice (i,j) du produit ${}^tMM$ est

$$\sum_{k=1}^{n} m_{k,i}m_{k,j} = {}^tC_iC_j,$$

ce qui correspond au produit scalaire (usuel) de C_i et C_j. On a donc ${}^tMM = I_n \Leftrightarrow$ le produit scalaire de C_i et C_j vaut δ_{ij} pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, ce qui est équivalent à dire que les colonnes de M forment une famille orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (v). On applique le résultat précédent à ${}^tM$ (puisque les colonnes de ${}^tM$ sont les lignes de M).

(iii) $\Rightarrow$ (i) et (ii). Trivial.

(i) ou (ii) $\Rightarrow$ (iii). On a $1 = \det(M)\det({}^tM) = \det(M)^2$, donc M est inversible. En multipliant à droite ou à gauche par M^{-1} on obtient ${}^tM = M^{-1}$. $\square$

Remarque. On retiendra en particulier que

— si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\det P = \pm 1$ (en effet, on déduit de ${}^tPP = I_n$ que $\det(P)^2 = 1$),

— si doit inverser une matrice orthogonale, il suffit de la transposer.

Exemple. Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (c'est-à-dire qu'elles sont deux-à-deux orthogonales et de norme 1). Son inverse est donc

$$A^{-1} = {}^tA = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.3. *$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. En particulier*

- *si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors P inversible et $P^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$,*
- *si $P, Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $PQ \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.*

De plus, $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (identifié à $\mathbb{R}^{n^2}$), c'est-à-dire un fermé/borné (puisqu'on est en dimension finie).

Démonstration. Comme pour tout $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a $\det P = \pm 1$, on a $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On a aussi $P^{-1} = {}^tP$, donc on a ${}^t(P^{-1})P^{-1} = I_n$, c'est-à-dire $P^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. De même, si $P, Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors

$$ {}^t(PQ)PQ = {}^tQ({}^tPP)Q = {}^tQQ = I_n, $$

donc $PQ \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. C'est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Munissons $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)}$. Si $M = (m_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ on a $\|M\|^2 = \sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2$. Pour tout $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a $\|P\| = \sqrt{n}$, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est borné. Notez que comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, la notion d'être borné ne dépend pas du choix de la norme.

Considérons maintenant $\Phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto {}^tMM$. C'est une application continue (si on voit Φ comme une fonction à n^2 variables alors Φ est polynomiale en ses coordonnées, donc continue). En particulier $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(\{I_n\})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (image réciproque d'un fermé par une application continue).

On vient de voir que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé/borné de l'espace vectoriel de dimension fini $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc c'est un compact. $\square$

Proposition 2.4. $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. On a $I_n \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M, N \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ on a $\det(M^{-1}) = 1/\det(M) = 1$ et $\det(MN) = \det(M)\det(N) = 1$, donc M^{-1} et $MN \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Proposition 2.5. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. Une base $\mathcal{B}'$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est orthogonale. En particulier, si $\mathcal{B}'$ est orthonormée, alors* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1$.

Démonstration. On écrit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ et $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n)$. Soit $P = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, de sorte que

$$ \mathbf{e}'_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}\mathbf{e}_i \qquad (j = 1, \ldots, n). $$

Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de P. Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, on trouve pour tous $j, k \in \{1, \ldots, n\}$

$$ \langle \mathbf{e}'_j, \mathbf{e}'_k \rangle = \sum_{i=1}^n a_{i,j}a_{i,k} = {}^tC_jC_k. $$

Donc $\mathcal{B}'$ est orthonormée si seulement si les colonnes de P forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire usuel), ce qui est équivalent à dire que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. $\square$

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, soient $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\mathbf{v} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ (où $\theta \in \mathbb{R}$ est un réel quelconque). Alors $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ et $(\mathbf{u}, -\mathbf{v})$ sont des bases orthonormées de $\mathbb{R}^2$, et les matrices de changement de base correspondantes (par rapport à la base canonique) sont orthogonales :

$$ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. $$

On verra plus tard que ce sont les seules matrices orthogonales de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 2.6. *Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est orthogonal si et seulement si sa matrice dans $\mathcal{B}$ est orthogonale.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors d'après la Proposition 1.4 (u est orthogonal si et seulement si $\mathcal{B}' := f(\mathcal{B})$ est une base orthonormée, c'est-à-dire si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(u)$ ($= P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$) est orthogonale (en utilisant la Proposition 2.5). $\square$

Corollaire 2.7. *Soit* $u \in \mathcal{O}(E)$. *Alors* $\det(u) = \pm 1$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée et P la matrice de u dans $\mathcal{B}$. On a $\det(u) = \det(P)$, et comme P est une matrice orthogonale, on a aussi $\det(P) = \pm 1$. □

Exemple. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale (vérifiez que les colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$). C'est donc la matrice, dans une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, d'un automorphisme orthogonal. Cet automorphisme est appelé *rotation* d'angle θ autour de l'axe $\mathbf{e}_1$ (on les étudiera plus tard).

3 Orientation

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien. On note $\mathbb{B}(E)$ l'ensemble des bases orthonormées de E.

Approche intuitive (informelle). Pour se repérer dans un espace, il faut être capable définir une orientation (la gauche, la droite, le haut, le bas, le Nord, le Sud etc.)

La droite $\mathbb{R}$. Sens de parcours de la droite ? Par convention on dit que le sens positif est de gauche vers droite. Dans un espace abstrait de dimension 1, il faudrait choisir un vecteur $\mathbf{x}$ non nul (qu'on peut supposer de norme 1) et dire qu'il désigne le sens positif. Si on change $\mathbf{x}$ en $-\mathbf{x}$ on change l'orientation. On peut alors définir des longueurs "orientées" (= mesures algébriques). La longueur AB sera > 0 si $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\mathbf{x}$, elle sera < 0 sinon.

Le plan $\mathbb{R}^2$. Orientation des angles ? Quand veut tourner de 45° par exemple, dans quel sens doit-on tourner ? Par convention, on dit que le sens positif est le sens anti-horaire (inverse des aiguilles d'une montre). Si on tourne dans le sens horaire on dit que l'angle est négatif. On peut aussi se servir de la base canonique $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et dire que par convention l'angle entre $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ vaut $+90°$ (l'angle entre $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_1$ vaut alors $-90°$. Dans un espace euclidien abstrait E de dimension 2, on peut choisir une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et dire que l'angle entre $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ vaut $+90°$. C'est un choix arbitraire qui permet alors d'orienter les angles. Encore une fois, si on choisit une autre base orthonormée on peut potentiellement changer l'orientation (par exemple si on prend $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$).

Remarque. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique, l'aire du parallélogramme dessiné par deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ vaut $\sin(\theta)\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$, où θ désigne l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Si θ est orienté, alors l'aire du parallélogramme dessiné par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est aussi orientée.

Formalisation.

On va maintenant définir la notion d'orientation dans un espace euclidien général E de dimension n (en oubliant l'intuition culturelle qu'on peut avoir).

On peut partager les éléments de $\mathbb{B}(E)$ en deux classes.

Première méthode. On fixe une base $\mathcal{B} \in \mathbb{B}(E)$. Soit $\mathcal{B}' \in \mathbb{B}(E)$. Alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \pm 1$. On partage alors $\mathbb{B}(E)$ entre les $\mathcal{B}'$ vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ et celle vérifiant $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$.

Deuxième méthode (équivalente à la première mais un peu plus abstraite).

Rappel. Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est une relation binaire vérifiant

- $x\mathcal{R}x$ (réflexive)
- $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$ (transitive)
- $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ (symétrique).

On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{B}(E)$ par

$$\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists u \in \mathrm{SO}(E) \text{ tel que } \mathcal{B}' = u(\mathcal{B}).$$

Proposition 3.1. *$\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'' \in \mathbb{B}(E)$. Rappelons que $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$.

- $\mathcal{B} = \mathrm{Id}(\mathcal{B})$ et $\mathrm{Id} \in \mathrm{SO}(E)$, donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
- Supposons $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'\mathcal{R}\mathcal{B}''$. Alors il existe $u, v \in \mathrm{SO}(E)$ tels que $\mathcal{B}' = u(\mathcal{B})$ et $\mathcal{B}'' = v(\mathcal{B}')$. On trouve $\mathcal{B}'' = v \circ u(\mathcal{B})$ avec $v \circ u \in \mathrm{SO}(E)$, donc $\mathcal{R}$ transitive.
- Enfin, si $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}'$, alors il existe $u \in \mathrm{SO}(E)$ tel que $\mathcal{B}' = u(\mathcal{B})$. En particulier $\mathcal{B} = u^{-1}(\mathcal{B}')$ avec $u^{-1} \in \mathrm{SO}(E)$. Donc $\mathcal{B}'\mathcal{R}\mathcal{B}$. D'où $\mathcal{R}$ est symétrique.

$\square$

Proposition 3.2. *Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \in \mathbb{B}(E)$. Alors $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}' \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.*

Démonstration. $\Rightarrow$. Supposons $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}'$. Soit $u \in \mathrm{SO}(E)$ tel que $\mathcal{B}' = u(\mathcal{B})$. Alors

$$1 = \det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

$\Leftarrow$. Supposons $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ et soit u défini par $\mathcal{B}' = u(\mathcal{B})$. Alors u est orthogonal (Proposition 1.4) et $\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$, donc $u \in \mathrm{SO}(E)$ et $\mathcal{B}\mathcal{R}\mathcal{B}'$. $\square$

Proposition 3.3. *$\mathcal{R}$ possède exactement deux classes d'équivalence.*

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) \in \mathbb{B}(E)$ et $\mathcal{B}' = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}, -\mathbf{e}_n) \in \mathbb{B}(E)$. Alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$, donc $\mathcal{B}\not\mathcal{R}\mathcal{B}'$. On a donc au moins deux classes d'équivalence. Soit maintenant $\mathcal{B}'' \in \mathbb{B}(E)$. Alors on a

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') = -\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}''),$$

donc ou bien $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = 1$, ou bien $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'') = 1$. On a donc bien exactement deux classes d'équivalence. $\square$

Ceci permet de partager $\mathbb{B}(E)$ en deux classes de bases.

Définition 3.4. Orienter l'espace $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ c'est choisir l'une des deux classes d'équivalence. Les bases de cette classes sont dites *directes* (= BOND). Les classes de l'autre classe sont dites *indirectes* (BONI).

Remarques.

- Orienter l'espace relève donc d'un choix arbitraire : on a deux classes de bases et on déclare que l'une de ces classes sera les bases directes... Cela revient à choisir une base et dire que cette base (et toutes les bases de la classe à laquelle elle appartient) sont directes.
- Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on a une orientation canonique : par convention on dit que la base canonique est directe. Dans un espace euclidien général il n'y a pas de choix “naturel”.
- On n'a pas besoin de la structure euclidienne pour orienter un espace. Dans un espace vectoriel quelconque E (pas forcément euclidien), pour partager les bases de E en deux classes on remplace $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ par $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

Proposition 3.5. *Par définition, si $\mathcal{B}$ est une BOND (resp. une BONI) et $u \in \mathrm{SO}(E)$, alors $u(\mathcal{B})$ est une BOND (resp. une BONI).*

Proposition 3.6. *Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont deux BOND, alors $\det_{\mathcal{B}} = \det'_{\mathcal{B}}$.*

Définition 3.7. Supposons que E est un espace euclidien orienté de dimension n. Si $u_1, \dots, u_n \in E$, on appelle produit mixte de $u_1, \dots, u_n$ la quantité

$$[u_1, \dots, u_n] := \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n),$$

où $\mathcal{B}$ est n'importe quelle BOND de E.

Remarque. (Interprétation géométrique) Supposons que $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ est une BOND de E. Alors le volume du parallélépipède rectangle $\{\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \mid x_1, \dots, x_n \in [0,1]\}$ vaut 1. D'une manière générale, le volume (orienté) du parallélépipède rectangle dessiné par $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ vaut

$$\mathrm{Vol}\Big(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \mid x_1, \dots, x_n \in [0,1]\Big) = \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n].$$

4 Groupe orthogonale en dimension 2

Proposition 4.1. *On a*

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ R_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

et

$$\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) = \left\{ S_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration. Pour $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. L'inclusion $\supseteq$ est claire (ce sont des matrices orthogonales de déterminant 1). Soit maintenant $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Soit $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ une colonne de A. Comme C est normée, on a $x^2 + y^2 = 1$, donc (x, y) appartient au cercle unité. En particulier il s'écrit sous la forme $(\cos\beta, \sin\beta)$ pour un certain β. Donc il existe $\theta, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}.$$

De plus comme $\det A = 1 = \sin\alpha\cos\theta - \sin\theta\cos\alpha = \sin(\alpha - \theta)$, on trouve

$$\alpha - \theta = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi.$$

On en déduit immédiatement que $\cos\alpha = -\sin\theta$ et $\sin\alpha = \cos\theta$.

Pour $\mathcal{O}^-(\mathbb{R})$: arguments similaires (exos). $\square$

Proposition 4.2. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

- *On a $R_{\alpha+\beta} = R_\alpha R_\beta$.*
- *Le groupe $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif (c'est-à-dire que $R_\alpha R_\beta = R_\beta R_\alpha$ pour tous α, β)*

Démonstration. Pour la première propriété, on fait un calcul direct. Ensuite, on a $R_\beta R_\alpha = R_{\beta+\alpha} = R_{\alpha+\beta} = R_\alpha R_\beta$. $\square$

Interprétation géométrique. Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique.

- La matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ correspond à la rotation d'angle θ.
- La matrice $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ correspond à la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle $\theta/2$.

Démonstration.
- Soit $\mathbf{u} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{v}$ son image après avoir appliqué R_θ. Un rapide calcul montre
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \cos\theta(x^2 + y^2) = \cos\theta\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$
De même, le déterminant dans la base canonique (qui est une BOND) $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vaut
$$\sin\theta(x^2 + y^2) = \sin\theta\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|,$$
donc l'angle (orienté) entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ vaut bien θ.
- On note que S_θ est symétrique et vérifie $S_\theta^2 = I_2$. Donc c'est la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace vectoriel D. Comme $m = \dim D$ vérifie $\det(S_\theta) = (-1)^{2-m}$ on a nécessairement $m = 1$, donc D est une droite. Un rapide calcule montre que l'image du point $\mathbf{u} = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$ est lui-même, donc D est la droite dirigée par $\mathbf{u}$.

□

Proposition 4.3. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension 2. Alors*
- $\mathrm{SO}(E)$ *est commutatif (c'est-à-dire que $r \circ r' = r' \circ r$ pour tout $r, r' \in \mathrm{SO}(E)$)*
- *Les éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ sont des involutions (c'est-à-dire vérifie $s^2 = \mathrm{Id}$)*
- *Tous les éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ sont des symétries orthogonales par rapport à une droite.*

Démonstration. On choisit une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E et on identifie $\mathcal{O}(E)$ à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ via $\Phi : u \mapsto M_\mathcal{B}(u)$. C'est un morphisme de groupes qui envoie $\mathrm{SO}(E)$ (resp. $\mathcal{O}^-(E)$) sur $SO_2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$). Les deux propriétés s'en déduisent immédiatement. La dernière est se déduit du cours sur les symétries orthogonales (comme on travaille dans une base orthonormée). □

Dans la suite $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

Proposition 4.4. *Soit $r \in \mathrm{SO}(E)$. Alors il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que la matrice de r dans n'importe quelle BOND est R_θ. On dit que r est la rotation d'angle θ.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une BOND de E. La matrice de r dans $\mathcal{B}$ appartient à $SO_2(\mathbb{R})$, donc il existe θ tel que $M_\mathcal{B}(r) = R_\theta$. Si $\mathcal{B}'$ est une autre BOND alors la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, et puisque $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif on a
$$M_{\mathcal{B}'}(r) = P^{-1}M_\mathcal{B}(r)P = M_\mathcal{B}(r)PP^{-1} = M_\mathcal{B}(r) = R_\theta.$$
Enfin on voit facilement que $R_\theta = R_\alpha$ implique $\theta = \alpha \mod 2\pi$. □

Proposition 4.5. *Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ normés. Alors il existe une unique rotation $r \in \mathrm{SO}(E)$ tel que $r(\mathbf{u}) = \mathbf{v}$.*

Démonstration. On complète $\mathbf{u}$ en une BOND $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}')$ de E. Puisque $\mathbf{v}$ est normé, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$ dans $\mathcal{B}$. La matrice d'une rotation qui transforme $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ est de la forme
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & * \\ \sin\theta & * \end{pmatrix}.$$
La rotation d'angle θ est l'unique rotation qui convient. □

Définition 4.6. Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ non nuls. On appelle *mesure de l'angle (orienté)* de $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ un réel $\theta \in \mathbb{R}$ (unique modulo 2π) tel que la rotation d'angle θ transforme $\mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$ en $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$. On note
$$\widehat{(\mathbf{u}, \mathbf{v})} = \theta \mod 2\pi.$$

Proposition 4.7. *(Relation de Chasles) Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont trois vecteurs non nuls de E, alors*
$$\widehat{(\mathbf{u}, \mathbf{w})} = \widehat{(\mathbf{u}, \mathbf{v})} + \widehat{(\mathbf{v}, \mathbf{w})} \mod 2\pi.$$

Démonstration. Quitte à diviser les vecteurs par leur norme, on peut les supposer normés. Soient r_α (resp. r_β) la rotation qui transforme $\mathbf{u}$ en $\mathbf{v}$ (resp. $\mathbf{v}$ en $\mathbf{w}$). Alors la rotation $r_{\alpha+\beta} = r_\beta \circ r_\alpha$ transforme $\mathbf{u}$ en $\mathbf{w}$, d'où le résultat. $\square$

Proposition 4.8. *On fixe une BOND $\mathcal{B}$ de E. Soit θ une mesure de l'angle (orienté) $\widehat{(\mathbf{u},\mathbf{v})}$ de deux vecteurs non nuls $\mathbf{u},\mathbf{v} \in E$. Alors*

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \cos\theta \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \quad \textit{et} \quad \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sin\theta\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

Remarque. Ce résultat est utile pour trouver l'angle (orienté) entre deux vecteurs.

Démonstration. Quitte à diviser $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ par leur norme on peut les supposer normés. On complète $\mathbf{u}$ en une BOND $\mathcal{B}' = (\mathbf{u},\mathbf{u}')$. Les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ont pour composantes respectives $(1,0)$ et $(\cos\theta, \sin\theta)$ dans $\mathcal{B}'$. On en déduit que

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \cos\theta \quad \text{et} \quad \det_{\mathcal{B}}(\mathbf{u},\mathbf{u}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sin\theta.$$

$\square$

Proposition 4.9. *Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien orienté de dimension 2. On note ρ_θ la rotation d'angle θ et s_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D. Alors*

- $\rho_\theta \circ \rho_\alpha = \rho_{\theta+\alpha}$
- $s_{D'} \circ s_D = \rho_{2\alpha}$ *(où α est l'angle entre D et D')*
- $\rho_\theta \circ s_D = s_{D'}$ *(où $D' = \rho_{\theta/2}(D)$)*
- $s_D \circ \rho_\theta = s_{D'}$ *(où $D' = \rho_{-\theta/2}(D)$)*

Remarque. En particulier toute rotation s'écrit comme composée de deux réflexions dont l'une peut être choisie arbitrairement.

Démonstration. On fixe une BOND $\mathcal{B}$ de E. On peut montrer les propriétés par un calcul matriciel.

- C'est intuitif, mais si on a besoin de s'en convaincre on peut vérifier qu'on a bien $R_\theta R_\alpha = R_{\theta+\alpha}$
- $s_{D'} \circ s_D \in \mathcal{O}(E)$ et son déterminant vaut $(-1)^2 = 1$, donc c'est une rotation. On calcule facilement son angle en considérant $\mathbf{u} \in D$ non nul. On a alors $s_D(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$, et l'angle entre $\mathbf{u}$ et $s_{D'}(\mathbf{u})$ vaut 2α.
- $\det(\rho_\theta \circ s_D) = -1$ donc c'est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Soit $\mathbf{u} \in D'$ non nul. L'angle entre $\mathbf{u}$ et $s_D(\mathbf{u})$ vaut $-\theta$. Quand on applique ρ_θ on trouve donc $\rho_\theta(s_D(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$. Donc c'est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathbb{R}\mathbf{u} = D'$.
- Raisonnement similaire.

$\square$