

Algèbre 4 - Cours 3

Orthogonalité (suite)

Printemps 2023

Table des matières

4	Projections orthogonales	1
5	Matrice d'une projection orthogonale	3
6	Symétries orthogonales	6
7	Angles dans un espace euclidien	8

4 Projections orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On note $\| \cdot \|$ la norme associée. Rappelons que pour tout sous-espace F de E , on a $E = F \oplus F^\perp$. En particulier, tout vecteur $\mathbf{x} \in E$ s'écrit de manière unique

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}, \quad \text{avec } \mathbf{x}_F \in F \text{ et } \mathbf{y} \in F^\perp. \quad (4.1)$$

Définition 4.1. On appelle *projection orthogonale sur F* l'application $p : E \rightarrow F$ définie pour tout $\mathbf{x} \in E$ par $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_F$, où $\mathbf{x}_F$ vérifie (4.1). On dit aussi que p est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. Autrement dit, $p(\mathbf{x})$ est l'unique vecteur de F vérifiant $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \in F^\perp$.

Proposition 4.2. Soit F un sous-espace de E de dimension k et $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ une base orthonormée de F . Le projeté orthogonal d'un vecteur $\mathbf{x} \in E$ sur F est

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_i \rangle \mathbf{f}_i.$$

Démonstration. Décomposons $p(\mathbf{x})$ dans la base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$:

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{f}_i$$

avec $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \in F^\perp$, pour $i = 1, \dots, k$ on a $\langle \mathbf{x} - p(\mathbf{x}), \mathbf{f}_i \rangle = 0$, d'où

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{f}_i \rangle = \langle p(\mathbf{x}), \mathbf{f}_i \rangle = \lambda_i.$$

□

Exemple(s)(Projection orthogonale sur une droite). Soit $\mathbf{a} \in E \setminus \{0\}$. La projection orthogonale d'un point $\mathbf{x} \in E$ sur la droite engendrée par $\mathbf{a}$ est

$$p(\mathbf{x}) = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}.$$

Démonstration.

Première méthode. On normalise $\mathbf{a}$ pour pouvoir appliquer la proposition précédente. On pose $\mathbf{b} = \mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|$. On trouve

$$p(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} = \left\langle \mathbf{x}, \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \right\rangle \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \mathbf{a}.$$

Deuxième méthode. On refait à la main. On écrit $p(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{a}$. On a la condition $\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) \perp \mathbf{a}$, c'est-à-dire $\langle \mathbf{x} - p(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle = 0$, d'où on tire

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle = \langle p(\mathbf{x}), \mathbf{a} \rangle = \lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle,$$

donc $\lambda = \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle / \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$. □

Exemple(s). Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ et $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$. Déterminez la projection orthogonale $p(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ sur la droite $\mathbb{R}\mathbf{a}$.

On écrit $p(\mathbf{u}) = \lambda \mathbf{a}$. On veut $\mathbf{u} - p(\mathbf{u}) \perp \mathbf{a}$, c'est-à-dire $\langle \mathbf{u} - \lambda \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 0$, d'où

$$\lambda \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = \langle p(\mathbf{u}), \mathbf{a} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{a} \rangle = 2 \times 1 + 1 \times (-2) + 1 \times 3 = 3.$$

D'un autre côté on a $\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle = 2^2 + 1^2 + 1^2 = 6$. Donc finalement $\lambda = 3/6 = 1/2$, et

$$p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(2, 1, 1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Proposition 4.3. Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}$ et $p : E \rightarrow F$ la projection orthogonale sur F .

1. $\mathbf{x} \in F \Leftrightarrow p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. L'ensemble des points fixe de p est donc F , et en particulier, $p \circ p = p$.
2. $\text{Im}(p) = F$ et $\ker(p) = F^\perp = \text{Im}(p)^\perp$. En particulier, le rang de p vaut $\text{rg}(p) = \dim F$.

Remarque. Rappel : le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Démonstration. 1. Soit $\mathbf{x} \in E$. On écrit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{x}_F \in F$ et $\mathbf{y} \in F^\perp$. Alors

$$(\mathbf{x} \in F) \Leftrightarrow (\mathbf{y} = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x}_F + \mathbf{y} = \mathbf{x}_F) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = p(\mathbf{x})).$$

En particulier, puisque pour tout $\mathbf{x} \in E$ on a $p(\mathbf{x}) \in F$, on en déduit que $p(p(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x})$.

2. Par ce qui précède, pour tout $\mathbf{x} \in F$ on a $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in \text{Im}(p)$, d'où $\text{Im}(p) = F$. Si $\mathbf{x} \in F^\perp$, par définition de p on a $p(\mathbf{x}) = 0$ (puisque $\mathbf{x} = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{\mathbf{x}}_{\in F^\perp}$). Réciproquement, si $p(\mathbf{x}) = 0$, alors

$$\mathbf{x} - p(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in F^\perp. \quad \square$$

Définition 4.4. Soit $\mathbf{x} \in E$ et F un sous-espace de E . On appelle distance de $\mathbf{x}$ à F , notée $d(\mathbf{x}, F)$, le nombre

$$d(\mathbf{x}, F) = \inf\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| ; \mathbf{y} \in F\} \geq 0.$$

Remarque. On a $d(\mathbf{x}, F) = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} \in F$.

Proposition 4.5. Soit F un sous-espace de E et $p : E \rightarrow F$ la projection orthogonale sur F . Pour tout $\mathbf{x} \in E$, on a

$$\|\mathbf{x} - p(\mathbf{x})\| = d(\mathbf{x}, F),$$

en particulier la distance de $\mathbf{x}$ à F est atteinte.

Remarque. (HP) Etant donnée une norme quelconque N sur E , on peut définir la distance de $\mathbf{x}$ à F relativement à N par la formule

$$d_N(\mathbf{x}, F) = \inf\{N(\mathbf{x} - \mathbf{y}) ; \mathbf{y} \in F\}.$$

Dans ce cas la distance de $\mathbf{x}$ à F est encore atteinte, donc l'inf peut être remplacé par un min (pour le prouver on peut utiliser des résultats de compacité; attention, l'hypothèse que E est de dimension finie est nécessaire ici).

Remarque. Attention : dans la Proposition 4.5 $\|\cdot\|$ est la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et pas n'importe quelle norme!!

Démonstration. Soit $\mathbf{x} \in E$. On note $\mathbf{y} = p(\mathbf{x})$. Etant donné $\mathbf{z} \in F$, par Pythagore on a

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2 = \|\underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{\in F^\perp} + \underbrace{(\mathbf{y} - \mathbf{z})}_{\in F}\|^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\|^2 \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2.$$

On en déduit que $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ avec égalité si et seulement si $\mathbf{z} = \mathbf{y}$. $\square$

Exemple(s). Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $\mathbf{a} = (2, 1, 1)$ et $\mathbf{u} = (1, -2, 3)$. Déterminez la distance de $\mathbf{u}$ à la droite engendrée par $\mathbf{a}$.

On a vu que la projection orthogonale $p(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ sur $\mathbb{R}\mathbf{a}$ était $(1, 1/2, 1/2)$. On en déduit que la distance de $\mathbf{u}$ à $\mathbb{R}\mathbf{a}$ est

$$\|\mathbf{u} - p(\mathbf{u})\| = \|(0, -5/2, 5/2)\| = \sqrt{0 + (5/2)^2 + (5/2)^2} = \sqrt{2 \times \frac{25}{4}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

5 Matrice d'une projection orthogonale

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . On note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ une base orthonormée E .

En utilisant que pour toute projection orthogonale p , on a $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in F = \text{Im}(p)$ et $p(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in F^\perp$, on déduit facilement le résultat suivant.

Proposition 5.1. Soit F un sous-espace de E de dimension k et p la projection orthogonale sur F . Soit $\mathcal{B}_1$ (resp. $\mathcal{B}_2$) une base de F (resp. $F^\perp$). On note $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ (base de E). Alors la matrice de p dans la base $\mathcal{B}'$ est

$$P = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

où $I_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ désigne la matrice identité. En particulier $\text{Tr}(p) = k = \dim F$.

Rappel. Le déterminant (resp. la trace) d'un endomorphisme $f : E \rightarrow E$ est le déterminant (resp. la trace) de sa matrice dans n'importe quelle base de E (cela ne dépend pas du choix de la base).

Le but est maintenant d'exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$ (orthonormée mais sans lien a priori avec p).

Définition 5.2. Soit $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ une famille de E (par forcément libre). La matrice de Gram associée est

$$M = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_k \rangle \\ \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_k \rangle \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_k \rangle \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}),$$

et le déterminant de Gram est $G(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k) = \det M$.

Proposition 5.3. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ écrits dans la base $\mathcal{B}$. Alors la matrice de Gram associée à $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ est $M = {}^tAA$. Par ailleurs, M est inversible si et seulement si $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ est libre.

Démonstration. On note C_j la j -ème colonne de A ($j = 1, \dots, k$). Comme $\mathcal{B}$ est orthonormée, pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ dont les vecteurs colonnes dans la base $\mathcal{B}$ sont $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = {}^tXY$. En particulier, pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, le coefficient d'indice (i, j) de M est par définition $\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle = {}^tC_i C_j$, ce qui est précisément le coefficient d'indice (i, j) de tAA , d'où $M = {}^tAA$.

On pose $F = \text{Vect}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ et on note $G_1, \dots, G_k$ les colonnes de M . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Notons que pour tout $\mathbf{x} \in F$, on a $\mathbf{x} = 0$ si et seulement si $\mathbf{x} \perp F$. D'où

$$\begin{aligned} \underbrace{\sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{f}_j}_{\in F} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{f}_j \perp F \Leftrightarrow \left\langle \mathbf{f}_i, \sum_{j=1}^k \lambda_j \mathbf{f}_j \right\rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, k \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \rangle = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, k \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_j \rangle \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k \lambda_j \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_j \rangle \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \begin{pmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_j \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_j \rangle \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^k \lambda_j G_j = 0. \end{aligned}$$

D'où $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ est liée si et seulement si $(G_1, \dots, G_k)$ est liée ($\Leftrightarrow \det M = 0$). $\square$

Théorème 5.4. Soit F un sous-espace de E de dimension k et $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ une base quelconque de F . On note $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ la matrice de taille $n \times k$ dont les colonnes sont les vecteurs $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ écrits dans la base $\mathcal{B}$. Alors matrice de la projection orthogonale p sur F (dans la base $\mathcal{B}$) est

$$P := M_{\mathcal{B}}(p) := A({}^tAA)^{-1}({}^tA).$$

Démonstration. Notons d'abord que tAA est la matrice de Gram de la base $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$, donc elle est bien inversible d'après la Proposition 5.3, et P est bien définie.

Remarque préliminaire. Soit $p, q, m \geq 1$ des entiers, $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs colonnes. On note $N = \text{mat}(C_1, \dots, C_m) \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont $C_1, \dots, C_m$. Alors

$$MN = \text{mat}(MC_1, \dots, MC_m).$$

Soient $(\mathbf{f}_{k+1}, \dots, \mathbf{f}_n)$ base $F^\perp$ (de sorte que $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ est une base de E). On note $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes qui correspondent à $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ écrits dans la base $\mathcal{B}$. Rappelons que $p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ si $\mathbf{x} \in F$, et $p(\mathbf{x}) = 0$ pour $\mathbf{x} \in F^\perp$. Donc

$$M_{\mathcal{B}}(p) \times \text{mat}(C_1, \dots, C_n) = \text{mat}(M_{\mathcal{B}}(p)C_1, \dots, M_{\mathcal{B}}(p)C_n) = (C_1 \cdots C_k \ 0 \cdots 0) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Puisque $\text{mat}(C_1, \dots, C_n)$ est inversible (car $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n)$ est une base), pour montrer la proposition il suffit de montrer que pour $P = A({}^tAA)^{-1}({}^tA)$ on a aussi

$$P \times \text{mat}(C_1, \dots, C_n) (= \text{mat}(PC_1, \dots, PC_n)) = (C_1 \cdots C_k \ 0 \cdots 0).$$

Comme $C_1, \dots, C_k$ sont les colonnes de A , on a déjà

$$P \times \text{mat}(C_1, \dots, C_k) = PA = A({}^tAA)^{-1}({}^tAA) = A,$$

donc $PC_j = C_j$ pour $j = 1, \dots, k$.

Soit maintenant $j \in \{k+1, \dots, n\}$. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ (de vecteur colonne X et Y dans $\mathcal{B}$ resp.), on a les équivalences $(\mathbf{x} \perp \mathbf{y}) \Leftrightarrow (X \perp Y) \Leftrightarrow ({}^tXY = 0)$. En particulier puisque $\mathbf{f}_j \perp F$, on a ${}^tC_iC_j = 0$ pour $i = 1, \dots, k$. On trouve alors

$${}^tAC_j = \begin{pmatrix} {}^tC_1C_j \\ \vdots \\ {}^tC_kC_j \end{pmatrix} = 0.$$

D'où $PC_j = A({}^tAA)^{-1}({}^tAC_j) = 0$. □

La formule du théorème précédent (et sa preuve) se simplifie lorsque F est une droite de E .

Proposition 5.5 (Projection orthogonale sur une droite). *Soit $\mathbf{a} \in E \setminus \{0\}$. On note A la matrice-colonne correspondant à $\mathbf{a}$ écrit dans la base $\mathcal{B}$. Alors la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}\mathbf{a}$ a pour matrice dans $\mathcal{B}$:*

$$P = \frac{A({}^tA)}{{}^tAA} = \frac{A({}^tA)}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Comme A est une matrice-colonne (et que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée), on a ${}^tAA = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$ (matrice 1×1), donc $({}^tAA)^{-1} = 1/\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle$. On conclut avec le Théorème 5.4. □

Exemple(s). $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. On pose $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$. Calculez la matrice (dans la base canonique) de la projection orthogonale p sur la droite $\mathbb{R}\mathbf{a}$. En déduire l'image de la projection de $\mathbf{x} = (3, 1, 0)$ sur $\mathbb{R}\mathbf{a}$. Déterminez l'image et le noyau de p .

La matrice de p est

$$P = \frac{1}{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} (1 \quad -2 \quad 3) = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Écrit dans la base canonique, l'image de $(3, 1, 0)$ est alors

$$P \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

L'image de p est $\mathbb{R}(1, -2, 3)$ (= l'espace sur lequel on projette). Son noyau est l'orthogonal de l'image. Deux vecteurs orthogonaux à $(1, -2, 3)$ sont par exemple $(2, 1, 0)$ et $(3, 0, -1)$ (calcul immédiat), et ils sont libres, donc forment une base de $\ker(p)$.

Proposition 5.6. *Soit P la matrice (dans la base $\mathcal{B}$) de la projection orthogonale sur un sous-espace de E . Alors*

1. P est symétrique, c'est-à-dire que ${}^tP = P$.
2. $P^2 = P$.

Reciproquement, toute matrice P vérifiant les deux conditions ci-dessus est la matrice (dans la base $\mathcal{B}$) de la projection orthogonale sur un certain sous-espace de E .

Démonstration. On note p la projection orthogonale sur un sous-espace F de E , et P sa matrice dans la base $\mathcal{B}$. L'identité $p \circ p = p$ se traduit par l'identité matricielle $P^2 = P$. Soit A définie comme dans le Théorème 5.4, de sorte que

$$P = A({}^tAA)^{-1}({}^tA).$$

En prenant la transposée (et puisque ${}^tM = M$, ${}^t(MN) = {}^tN {}^tM$ et ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$), on trouve

$$\begin{aligned} {}^tP &= {}^t\left(A({}^tAA)^{-1}({}^tA)\right) = {}^tA({}^tA)({}^tAA)^{-1}({}^tA) = A({}^tAA)^{-1}({}^tA) \\ &= A({}^tA \times {}^tA)^{-1}({}^tA) \\ &= A({}^tAA)^{-1}({}^tA) = P. \end{aligned}$$

Soit maintenant P telle que ${}^tP = P$ et $P^2 = P$. On note f l'endomorphisme de E tel que $M_{\mathcal{B}}(f) = P$ et $F \subseteq E$ l'image de f . Montrons que f est la projection orthogonale sur F . Soit $\mathbf{x} \in \ker f$ et $\mathbf{z} \in F$. Il existe $\mathbf{y} \in E$ tel que $\mathbf{z} = f(\mathbf{y})$. On note X, Y, Z les vecteurs-colonne de $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ (resp.) dans la base $\mathcal{B}$. On a $PX = 0$ et $Z = PY$. Alors

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = {}^tXZ = {}^tXPY = {}^tX({}^tP)Y = {}^t(PX)Y = 0.$$

Donc $\mathbf{x} \perp \mathbf{z}$. Comme c'est vrai pour tout $\mathbf{z} \in F$, on a $\mathbf{x} \perp F$. On en déduit que $\ker f \subseteq F^\perp$, et comme $\dim \ker(f) = n - \dim \text{Im}(f) = n - \dim F = \dim F^\perp$, on en déduit que $F^\perp = \ker(f)$. Finalement, puisque $P^2 = P$, on a aussi

$$PZ = P^2Y = PY = Z,$$

d'où $f(\mathbf{z}) = \mathbf{z}$ pour tout $\mathbf{z} \in F$. Soit maintenant $\mathbf{x} \in E$. On écrit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{x}_F \in F$ et $\mathbf{y} \in F^\perp = \ker(f)$. Alors par ce qui précède, on a

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_F) + f(\mathbf{y}) = \mathbf{x}_F,$$

donc f est bien la projection orthogonale sur F . □

6 Symétries orthogonales

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n et $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E .

Définition 6.1. Soit F un sous-espace de E . La *symétrie orthogonale* par rapport à F est l'application $s : E \rightarrow E$ qui à tout $\mathbf{x} \in E$, qui se décompose de manière unique comme $\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{x}_F \in F$ et $\mathbf{y} \in F^\perp$, associe $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_F - \mathbf{y}$. Si F est une droite, on dit que s est un *retournement*. Si F est un hyperplan, on dit que c'est une *réflexion*.

Proposition 6.2. Soit F un sous-espace de E . On note s la symétrie orthogonale par rapport à F et p la projection orthogonale sur F .

1. Pour tout $\mathbf{x} \in F$, on a $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ et pour tout $\mathbf{x} \in F^\perp$, on a $s(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.
2. $s \circ s = \text{Id}$, en particulier s est bijective.
3. $s = 2p - \text{Id}$.
4. Soit $k = \dim F$. Si $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ est une base de E telle que $\mathcal{B}_1$ soit une base de F et $\mathcal{B}_2$ une base de $F^\perp$, alors la matrice de s dans $\mathcal{B}'$ est

$$S = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-k} \end{array} \right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

5. La matrice S de s dans la base $\mathcal{B}$ est symétrique et vérifie $S^2 = I_n$.
6. Réciproquement, toute matrice symétrique S vérifiant $S^2 = I_n$ est la matrice (dans la base $\mathcal{B}$) d'une symétrie orthogonale.

Démonstration. Soit $\mathbf{x} \in E$. On écrit $\mathbf{x} = \mathbf{x}_F + \mathbf{y}$ avec $\mathbf{x}_F \in F$ et $\mathbf{y} \in F^\perp$.

1. Immédiat par définition de s .
2. On a $s(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_F - \mathbf{y}$ et $s(s(\mathbf{x})) = s(\mathbf{x}_F - \mathbf{y}) = \mathbf{x}_F + \mathbf{y} = \mathbf{x}$.

3. Par définition de p on a $2p(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 2\mathbf{x}_F - (\mathbf{x}_F + \mathbf{y}) = \mathbf{x}_F - \mathbf{y} = s(\mathbf{x})$.
4. Pour tout élément $\mathbf{f}$ de $\mathcal{B}_1$ on a $s(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$ et pour tout $\mathbf{f} \in \mathcal{B}_2$ on a $s(\mathbf{f}) = -\mathbf{f}$. On en déduit que $M_{\mathcal{B}'}(s)$ a bien la forme attendue.
5. Soit P la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. On a vu que P était symétrique. Donc

$$S = 2P - I_n$$

est aussi symétrique.

6. Soit $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $S^2 = I_n$. On pose $P = (S + I_n)/2$. On vérifie que P est symétrique et vérifie $P^2 = P$. Donc c'est la matrice (dans $\mathcal{B}$) d'une projection orthogonale p sur un certain sous-espace F . Alors $s := 2p - \text{Id}$ est la symétrie orthogonale par rapport à F et sa matrice dans $\mathcal{B}$ est bien S .

□

Corollaire 6.3. Soit F un sous-espace de dimension m et s la symétrie orthogonale par rapport à F . Alors $\det(s) = (-1)^{n-m}$ et $\text{Tr}(s) = 2m - n$.

Exemple(s). $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. Soit F la droite d'équation $y = 3x$. Déterminez les matrices de la projection orthogonale p sur F et de la symétrie orthogonale s par rapport à F (dans la base canonique).

Solution. Un vecteur directeur de F est $\mathbf{a} = (1, 3)$. On note A la matrice-colonne associée. Soit P la matrice de p et S la matrice de s . D'après le cours on a

$$P = \frac{A^t A}{A^t A} = \frac{1}{1 \times 1 + 3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Puisque $s = 2p - \text{Id}$ on en déduit

$$S = 2P - I_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode. On fait le calcul dans la base $\mathcal{B}' = \{(1, 3), \underbrace{(3, -1)}_{\in F^\perp}\}$. On a

$$M_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule ensuite la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{\det Q} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit ensuite que

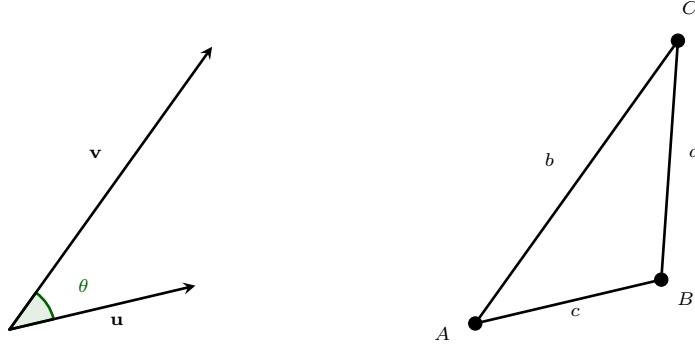
$$P = Q^{-1} M_{\mathcal{B}'}(p) Q \quad \text{et} \quad S = Q^{-1} M_{\mathcal{B}'}(s) Q.$$

Rappel. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice inversible. Alors

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

7 Angles dans un espace euclidien

Supposons que $E = \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ non nuls et $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.



Il est connu que θ vérifie

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \cos \theta \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|. \quad (7.1)$$

On peut facilement démontrer cette formule à l'aide de la loi des cosinus (théorème d'Al-Kashi) : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$, et en développant $a^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.

Eq. (7.1) est encore valable dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel puisqu'on se ramène à travailler dans le plan $\text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. On va maintenant se servir de cette formule pour définir la notion d'angle dans un espace euclidien abstrait.

Définition 7.1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée. Etant donnés $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E \setminus \{0\}$, on définit l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ comme étant l'unique $\theta \in [0, \pi]$ vérifiant

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Remarques.

- Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|) \in [-1, 1]$, donc θ est bien défini (et unique car $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est bijective).
- Attention, la notion d'angle dépend du choix du produit scalaire! (comme on a vu que la notion d'orthogonalité dépendait du choix du produit scalaire).
- Avec cette définition on a bien que $\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow \theta = \pi/2$ (et on en déduit facilement le théorème de Pythagore).