TP n° 1

Des suites récurrentes

Ceci est un TD/TP. Rédigez vos réponses sur une feuille indépendante en reportant les numéros des questions.

Pour commencer, à l'adresse https://plmbox.math.cnrs.fr/f/36ecd9cc16af49069bff/ télécharger le fichier **TP1-a-completer.ipynb** qui contient les programmes Python à compléter pour ce TD/TP, puis ouvrir le fichier dans le Notebook Jupyter.

1 Une première étude de suite récurrente

Soit $f : [-1, +\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto \sqrt{1+x}$. On définit $g : [-1, +\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) - x$.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par la donnée de $u_0 \in [-1, +\infty[$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1.1 Propriétés de la fonction f

1. **Premières observations à l'aide de Python.**
   (a) Définir la fonction f dans Python :

   ```
   def f(x):
       return # A COMPLETER
   ```

   (b) Avec Python, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-1, 5]$.
   Sur le même graphique, tracer la droite d'équation $y = x$ (toujours pour des abscisses dans l'intervalle $[-1, 5]$).
   Faire apparaître le nom des axes, la légende et donner un titre à ce graphique.

   (c) Sur le graphique tracé, qu'observez-vous concernant les propriétés suivantes ?
   — La fonction f est-elle monotone ?
   — La fonction f admet-elle des points fixes ?
   — Quel est le signe de g ?

2. **Preuves.**
   (a) Montrer que f admet un unique point fixe, noté a. Donner la valeur exacte de a.
   (b) Dresser le tableau de variations de f.
   (c) Étudier le signe de g.

1.2 Propriétés des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

1. **Premières observations à l'aide de Python.**
   (a) Compléter la fonction Python suivante, qui prend en arguments un entier $n \in \mathbf{N}$, une fonction f (préalablement définie avec Python) et un réel u_0, pour qu'elle renvoie u_n :

```python
def u(n,f,u0):
    v = # A COMPLETER
    for k in range("A COMPLETER")
        v =   # A COMPLETER
    return v
```

(b) On choisit $u_0 = 0$. Tracer le graphique qui représente u_n en fonction de n pour $n = 0, .., N_{\max}$ avec $N_{\max} = 20$.

(c) Dessiner les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour d'autres valeurs de u_0. On illustrera les deux cas $u_0 \in [-1, a]$ et $u_0 \in]a, +\infty[$.

(d) Sur les graphiques tracés, qu'observez-vous concernant les propriétés suivantes ?
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle monotone ?
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle majorée/minorée ? par quel réel ?
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle convergente ?

2. **Preuves.**

(a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors elle converge vers a.

(b) On suppose d'abord que $u_0 \in [-1, a[$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ prend toutes ses valeurs dans $[-1, a[$ et qu'elle est croissante. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.

(c) Étudier les cas $u_0 = a$ et $u_0 \in]a, +\infty[$.

2 Une deuxième étude de suite récurrente

On considère $f :]-1, +\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On définit $g :]-1, +\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) - x$ et $h :]-1, +\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto f \circ f(x) - x$

2.1 Propriétés de la fonction f

1. **Premières observations à l'aide de Python.**

(a) Définir la fonction f dans Python.

(b) Avec Python, tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, 3]$.

Sur le même graphique, tracer la courbe représentative de h ainsi que la droite d'équation $y = x$.

Faire apparaître le nom des axes, la légende et donner un titre à ce graphique.

(c) Sur le graphique tracé, qu'observez-vous concernant les propriétés suivantes ?
- La fonction f est-elle monotone ?
- La fonction f admet-elle des points fixes ?
- Quel est le signe de g ?
- Quel est le signe de h ?

2. **Preuves.**

(a) Montrer que f admet un unique point fixe, noté a. Donner la valeur exacte de a.

(b) Dresser le tableau de variations de f.

(c) Étudier le signe de g.

(d) Étudier le signe de h.

2.2 Propriétés des suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par la donnée de $u_0 \in]-1,+\infty[$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. **Premières observations à l'aide de Python.**
   On suppose d'abord que $u_0 \in]-1, a[$.
   (a) Tracer le graphique qui représente u_n en fonction de n pour $n = 0, .., N_{\max}$ avec $N_{\max} = 20$.
   (b) Dessiner les premiers termes de ces suites en utilisant la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.
   (c) Sur les graphiques tracés, qu'observez-vous concernant les propriétés suivantes ?
      — Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ sont-elles monotones ? si oui quel est leur sens de variation ?
      — Sont-elles majorées/minorées ?
      — Sont-elles convergentes ?
      — La suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-elle convergente ?
   (d) Reprendre les questions (a), (b) et (c) avec $u_0 \in]a, +\infty[$.
2. **Preuves.**
   (a) On suppose que $u_0 \in]-1, a[$. Montrer que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbf{N}}$ prend toutes ses valeurs dans $]-1, a[$ et qu'elle est croissante. En déduire qu'elle converge et déterminer sa limite.
   (b) On suppose toujours que $u_0 \in]-1, a[$. Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   (c) On suppose toujours que $u_0 \in]-1, a[$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   (d) Étudier les cas $u_0 = a$ et $u_0 \in]a, +\infty[$.