Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de printemps 2022-2023**
L1 Math-Info UE : Analyse 2

Feuille d'exercices n° 7

Suites récurrentes linéaires

Exercice 1.
Pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, exprimer u_n en fonction de n, puis étudier leur convergence.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.
2. $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n = 0$.
3. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4u_{n+2} = 2\sqrt{3}u_{n+1} - u_n$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{18u_n u_{n+1}}{3u_n + u_{n+1}}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n}$.
   (a) Vérifier que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (b) En déduire une expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Discuter la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{6}\right\}$. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \left(t - \frac{5}{6}\right) u_{n+1} + \frac{1}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right) u_n.$$

1. Justifier qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a\left(t - \frac{1}{2}\right)^n + b\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.
2. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de a, b et t.