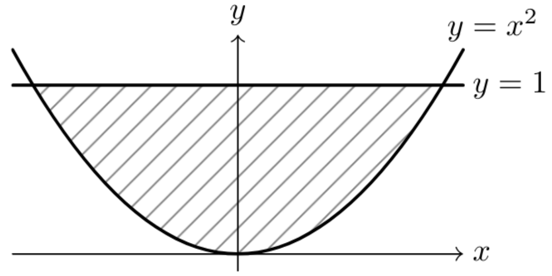
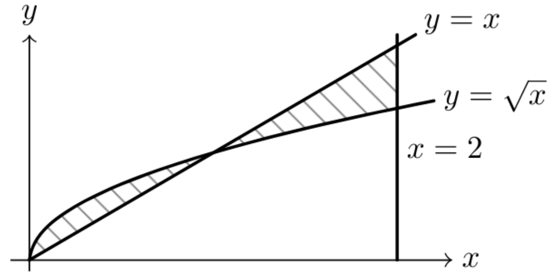
## Feuille d'exercices n° 6
### Intégration et calculs de primitives

**Exercice 1.** Déterminer l'aire des domaines hachurés représentés ci-dessous.

1.



2.



**Exercice 2.** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ ;
2. $\displaystyle\int_0^1 u^2 e^{2u}\,\mathrm{d}u$ ;
3. $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ ;
4. $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \sin x\,\mathrm{d}x$ ;
5. $\displaystyle\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$ ;
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{3}{2x+4}\,\mathrm{d}x$ ;
7. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$ ;
8. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ ;
9. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ ;
10. $\displaystyle\int_0^\pi (\sin x)^7 \cos x\,\mathrm{d}x$ ;
11. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \tan x\,\mathrm{d}x$ ;
12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{9x^2-6}{x^3-2x+5}\,\mathrm{d}x$ ;
13. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2-4)^4}\,\mathrm{d}x$ ;
14. $\displaystyle\int_0^\pi e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ ;
15. $\displaystyle\int_0^1 \arctan x\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 3.**

1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$.
2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/4} (\sin x)^n\,\mathrm{d}x = 0$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{x+n}\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 4.** Soit $f$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ par : pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(x)$ en fonction de valeurs prises par la fonction $F$.
2. Montrer que $g$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 5.**

1. Déterminer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{2x-5}{2x^2+3}\,\mathrm{d}x$ ; (c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$ ; (e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ ;

(b) $\displaystyle\int \frac{4}{(x-1)^5}\,\mathrm{d}x$ ; (d) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ ; (f) $\displaystyle\int \frac{3x^2}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

2. Déterminer la primitive $F$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{3x^2}{1-x^2}$ qui vaut $-6$ en 2.

**Exercice 6.**

1. En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbb{R}\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \cos^3 x$.
2. Calculer les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \cos^4 x$.
*On linéarisera* $\cos^4 x$ *en utilisant la formule d'Euler :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

**Exercice 7.** Calculer les intégrales suivantes en faisant le changement de variable indiqué entre parenthèses :

1. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ (poser $u = \sin x$) ;
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{5\,\mathrm{ch}\,x + 3\,\mathrm{sh}\,x + 4}$ (poser $u = e^x$) ;
3. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{3\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ (poser $u = \cos x$) ;
4. $\displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$ (poser $u = \sqrt{x}$) ;
5. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$ (poser $u = \tan \frac{x}{2}$).