Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info — UE Analyse 2

Feuille d'exercices n° 5

FORMULES DE TAYLOR, CONVEXITÉ, MÉTHODE DE NEWTON

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} = f''(x).$$

Exercice 2. On considère $f\colon]0,+\infty[\to \mathbf{R}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.
2. Soit un entier $n \geq 1$, pour tout $x \in]0,+\infty[$, écrire la formule de Taylor-Lagrange pour f à l'ordre $n+1$ entre 0 et x.
3. *Application 1.*
   (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.
   (b) En déduire une valeur approchée de ln(1,003) à 10^{-8} près.
4. *Application 2.* On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\ln 2$.

Exercice 3.

1. Montrer que la fonction $-\ln$ est convexe sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer les inégalités suivantes :
   (a) Pour tout $x \geq 0$, tout $y \geq 0$, $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, tout $(x_1,\ldots,x_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$, $(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leq \dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}$.
3. Montrer que pour tout $a > 0$, tout $b > 0$, tout $p > 0$, tout $q > 0$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Exercice 4. *Méthode de Newton sur un exemple.*
On cherche à calculer les zéros de $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2 - 2$.

1. Montrer que chacun des zéros de f peut être approché par la méthode de Newton.
2. Écrire explicitement la relation de récurrence vérifiée par la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par la méthode de Newton.
3. On note $g\colon \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{x}$. Dresser le tableau de variations de g.

4. *Choix de la donnée initiale pour approcher chacun des zéros.*
   (a) Soit $x_0 > 0$.
      i. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est bien définie et minorée par $\sqrt{2}$.
      ii. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.
      iii. En déduire qu'elle converge vers $\sqrt{2}$.
   (b) Soit $x_0 < 0$. Montrer que la suite associée $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et majorée. En déduire qu'elle converge vers $-\sqrt{2}$.

Exercice 5. *Étude de la méthode de Newton dans le cas d'une fonction convexe*
On va montrer dans cet exercice que si on ajoute une hypothèse de convexité, la méthode de Newton converge pour des points de départ éloignés de la racine cherchée.
Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f est convexe et qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) > 0$.
Soit $x_0 > \alpha$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1. Justifier que pour tout $x \geq \alpha$, $f''(x) \geq 0$, $f'(x) > 0$ et pour tout $x > \alpha$, $f(x) > 0$.
2. Dans cette question, on veut justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et vérifie $x_n > \alpha$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (a) Soit $p \in \mathbf{N}$, on suppose que x_p est bien défini, et vérifie $x_p > \alpha$.
      i. Montrer qu'il existe $y_p \in]\alpha, x_p[$ tel que

$$f(x_p) + f'(x_p)(\alpha - x_p) + \frac{f''(y_p)}{2}(\alpha - x_p)^2 = 0$$

      ii. En déduire que x_{p+1} est bien défini et que

$$x_{p+1} - \alpha = \frac{f''(y_p)}{2f'(x_p)}(x_p - \alpha)^2$$

   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et vérifie $x_n \geq \alpha$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers α.