Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info UE : Analyse 2

Feuille d'exercices n° 4

Étude locale des fonctions - Développements limités

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.
   Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $|g(x)| < \dfrac{|a|}{2}$.
2. On considère une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui admet le développement suivant au voisinage de 0 :
   $$f(x) = 1 - x + ax^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2).$$
   Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\eta, \eta]$, $f(x) - (1-x)$ est du même signe que a.

Exercice 2. Donner le polynôme de Taylor à l'ordre 3 au point $a \in \mathbb{R}$ pour les fonctions suivantes.

1. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$, $a = 0$.
2. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{x^2}$, $a = 1$.
3. $f\colon]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln(1+x)$, $a = 0$.

Exercice 3. Si elle existe, déterminer $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dans les cas suivants.

1. $f\colon x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, $a = +\infty$.
2. $f\colon x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$, $a = 0^+$.
3. $f\colon x \mapsto \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{x}}$, $a = +\infty$.

Exercice 4. Établir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n proposé :

1. $f(x) = e^{-x}$ et $n = 5$,
2. $f(x) = \ln(1+x^2)$ et $n = 6$,
3. $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{x^3}$, $n = 2$ puis $n = 3$,
4. $f(x) = \sin(2x) + \cos(x^2)$ et $n = 5$,
5. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ et $n = 3$,
6. $f(x) = \sqrt{2+x}$ et $n = 3$,
7. $f(x) = \ln(2+x)$ et $n = 2$,
8. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ et $n = 3$,
9. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{e^x \sin x}$ et $n = 2$,
10. $f(x) = (1+x)^{1/x}$ et $n = 3$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction admettant le développement limité suivant au voisinage de 1 :
$$f(x) = 1 + 2(x-1) - 4(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\Big((x-1)^2\Big).$$

1. Justifier que f est dérivable en 1.
2. Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de f, $\mathcal{C}_f$, au point d'abscisse 1 ?
3. Quelle est la position relative du graphe de f, $\mathcal{C}_f$, et de cette tangente au voisinage du point d'abscisse 1 ?
4. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage du point d'abscisse 1.

Exercice 6. Établir pour chacune des fonctions f proposées ci-dessous un développement limité de f en 0 à l'ordre n proposé :

1. $f(x) = \dfrac{1}{1-\sin x}$ et $n = 3$,
2. $f(x) = \cos(\sin x)$ et $n = 4$,
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$ et $n = 2$,
4. $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{1+x}}$ et $n = 3$.

Exercice 7.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f : x \mapsto e^{3x}\sin(2x)$.
2. Calculer $f^{(3)}(0)$.

Exercice 8. Si elles existent, calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \ln(1+\sin x)}{x^2}$;
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{x^2}$.

Exercice 9. Calculer un développement limité de la fonction f dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ quand x tend vers 1 et à l'ordre 3,
2. $f(x) = x^2\ln x$ où x tend vers 1 et à l'ordre 5,
3. $f(x) = \sin x$ quand x tend vers $\dfrac{\pi}{4}$ et à l'ordre 3.

Exercice 10. Calculer un développement limité en $+\infty$ à l'ordre 3 de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$,
2. $f(x) = \dfrac{1+x^2}{(1+x)(2-x)}$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{x\sin(1/x)}$.

Exercice 11. Considérons la fonction $f\colon [1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{1/x}\sqrt{x^2-1}$.

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :
$$\frac{f(x)}{x} = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$
2. En déduire que la droite d'équation $y = x+1$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $+\infty$.
3. Quelle est la position de cette asymptote par rapport au graphe de f au voisinage de $+\infty$?

Exercice 12. On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}.$$

1. Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.
2. En déduire l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, puis la position de cette tangente par rapport au graphe de f au voisinage de ce point.
3. Déterminer l'équation d'une droite asymptote à f en $+\infty$ et déterminer sa position par rapport au graphe de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 13. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.