Feuille d'exercices n° 3

Dérivation, application aux suites récurrentes

Exercice 1. Étudier la dérivabilité de f sur I et, lorsqu'elle existe, calculer la dérivée f' dans les situations suivantes :

1. $f\colon x \mapsto x(x+3)e^x$ pour $I = \mathbf{R}$,
2. $f\colon x \mapsto 2^x$ pour $I = \mathbf{R}$,
3. $f\colon x \mapsto e^{-x^2}$ pour $I = \mathbf{R}$,
4. $f\colon x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}$ pour $I = \mathbf{R}^+$,
5. $f\colon x \mapsto \frac{\sin x}{1+\cos x}$ pour $I = \,]-\pi, \pi[$,
6. $f\colon x \mapsto \ln(1+\sin^2 x)$ pour $I = \mathbf{R}$.

Exercice 2. Pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, on définit $f_{a,b}$ sur $\mathbf{R}^+$ par

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tels que $f_{a,b}$ soit continue sur $\mathbf{R}^+$.
2. La fonction $f_{a,b}$ peut-elle être dérivable en 0 ?
3. Déterminer $a, b \in \mathbf{R}$ tels que $f_{a,b}$ soit dérivable sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3. On définit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbf{R}$?
2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbf{R}$?
3. La fonction f' est-elle continue sur $\mathbf{R}$?

Exercice 4.

1. Soit $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose $f(0) = f(1/2) = f(1) = 0$. Montrer que f'' s'annule sur l'intervalle $]0,1[$.
2. Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 3$, p et q deux réels. Montrer que le polynôme $P(X) = X^n + pX + q$ a au plus trois racines réelles.

Exercice 5.
Existe-t-il $f\colon [0,2] \to \mathbf{R}$ dérivable telle que $f(0) = 4$, $f(2) = -1$ et pour tout $x \in [0,2]$, $|f'(x)| \leq 2$?

Exercice 6. Appliquer le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|\sin x| \leq |x|$.
2. Pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

Exercice 7. Montrer que les fonctions

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto (1+|x|)e^{-|x|} \qquad \text{et} \qquad f_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0\,, \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{sinon,} \end{cases}$$

sont dérivables et calculer leur dérivée. Sont-elles deux fois dérivables sur $\mathbf{R}$?

Exercice 8. On note pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

1. Pour tout $k \in \mathbf{N}^\star$, montrer l'encadrement suivant : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \dfrac{1}{k}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $\ln(n+1) \leq H_n$.
3. Conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n = +\infty$.

Exercice 9.

Partie A. On considère $g :]0,+\infty[\to \mathbf{R}$, $x \longmapsto 1 + x + \ln x$.

1. Dresser le tableau de variations complet de g.
2. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$. On note α cette solution.

Partie B. On considère $f : \mathbf{R} \to]0,+\infty[$, $x \longmapsto e^{-(1+x)}$.

1. Montrer que α est l'unique point fixe de f.
2. Montrer que, pour tout $(x,y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{e}\,|x-y|$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = e^{-(1+u_n)}$.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n > 0$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{e}\,|u_n - \alpha|$.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et préciser sa limite.

Exercice 10.

1. Montrer que l'équation (E) : $2\ln x - x + 2 = 0$ en $x \in \mathbf{R}_+^*$ admet une unique solution sur $[2,+\infty[$. On note a cette solution. Vérifier que de plus $a \in]5,6[$.
2. Afin de déterminer une approximation de a, on introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \varphi(u_n)$, où $\varphi :\ [2,+\infty[\to [2,+\infty[$, $x \mapsto 2\ln x + 2$.
   (a) i. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [5,6]$.
   ii. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
   iii. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente et que sa limite est a.
   (b) i. Montrer que, pour tout $x \in [5,6]$, $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{2}{5}$.
   ii. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,
   $$|u_{n+1} - a| \ \leq\ \frac{2}{5}\,|u_n - a|.$$
   iii. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$.
   (c) Déterminer un entier n tel que u_n soit une valeur approchée de a à 10^{-3} près.