Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info — UE Analyse 2

Feuille d'exercices n° 2

Révisions sur les fonctions, relations de comparaison

Exercice 1. Étudier la limite de $f\colon x \mapsto f(x)$ au point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ dans les différents cas suivants :

1. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$, $a = 2$,
2. $f(x) = \dfrac{x^n-1}{x-1}$, $a = 1$, $n \in \mathbb{N}^*$,
3. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\sin x$, $a = +\infty$,
4. $f(x) = \dfrac{x^2+2|x|}{x}$, $a = 0$.

Exercice 2.

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note $I = [a, b]$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On rappelle qu'un *point fixe* de f est un réel $x \in I$ tel que $f(x) = x$.
   (a) La continuité de la fonction f est-elle une condition nécessaire à l'existence d'un point fixe ?
   (b) La continuité de la fonction f est-elle une condition suffisante à l'existence d'un point fixe ?
2. Dans cette question, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^{-x}$.
   Démontrer que la fonction f admet un unique point fixe sur l'intervalle $I = [0, 1]$.
   On pourra étudier la fonction auxiliaire g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.
3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note $I = [a, b]$. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$.
   (a) Démontrer que f possède un point fixe sur $[a, b]$.
   (b) Dans cette question, on suppose de plus que f est strictement décroissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?
   (c) Dans cette question, on suppose maintenant que f est strictement croissante sur $[a, b]$. Cette hypothèse supplémentaire est-elle suffisante pour assurer l'unicité du point fixe ?

Exercice 3. Pour chacune des propositions suivantes, décider si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $x^3 = \underset{x\to 0}{O}(x^2)$,
2. $x^2 = \underset{x\to 0}{O}(x^3)$,
3. $x^2 = \underset{x\to +\infty}{O}(x^3)$,
4. $2x + 1 = \underset{x\to +\infty}{O}(x)$,
5. $2x^3 + \sqrt{x^4+x^2} = \underset{x\to 0}{O}(x^2)$,
6. $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$,
7. $x^2 = \underset{x\to 1}{o}(x)$,
8. $x^2 = \underset{x\to +\infty}{o}(x)$,
9. $1 + x^7 = \underset{x\to 0}{o}(1)$,
10. $x^5 + x^2 + x = \underset{x\to 0}{o}(x^5)$,
11. $x^5 + x^2 + x = \underset{x\to 0}{o}(x)$,
12. $x^5 + x^2 + x = \underset{x\to 0}{o}(1)$,
13. $\sin x = \underset{x\to +\infty}{o}(x)$,
14. $\sin x = \underset{x\to 0}{o}(x)$,
15. $2x^3 + \sqrt{x^4+x^2} = \underset{x\to 0}{o}(x)$,
16. $\ln(|x|) = \underset{x\to 0}{o}(1/\sqrt{|x|})$,
17. $\ln(|x|) = \underset{x\to 0}{o}(e^x)$,
18. $\ln(|x|) = \underset{x\to +\infty}{o}(e^x)$.

Exercice 4. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f\colon I \to \mathbb{R}$. Pour chacune des propositions suivantes, décider si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. Si $f(x) = x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ alors $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
2. Si $f(x) = x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ alors $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
3. Si $f(x) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ alors $f(x^2) = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.
4. Si $f(x) = x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ alors $f(1+x) = (1+x)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

Exercice 5. Pour chacune des propositions suivantes, décider si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$,
2. $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1+x$,
3. $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1+2x$,
4. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 0$,
5. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$,
6. $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 2x$,
7. $e^{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 1+x$,
8. $e^{x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$,
9. $e^{x^2} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$.

Exercice 6. Donner pour chacune des fonctions proposées ci-dessous un équivalent simple :

1. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 6x$ quand $x \to 0$,
2. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 6x$ quand $x \to +\infty$,
3. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 6x$ quand $x \to 2$,
4. $f(x) = x^4 + 5x^2 - 6x$ quand $x \to 1$,
5. $f(x) = x^7 + \sqrt{x} + (\ln x)^2 + e^{2x} + 4x^5 - x^9 + 5^{x+1}$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 7. *Croissances comparées et équivalents.*
Donner un équivalent simple de la fonction $f\colon x \mapsto f(x)$ en 0 et en $+\infty$ dans les cas suivants :

1. $f(x) = x + \cos x$,
2. $f(x) = x + \sin x$,
3. $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$,
4. $f(x) = xe^x$,
5. $f(x) = x^2 + \sin x$,
6. $f(x) = e^{2x} - \sqrt{x}$,
7. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

Exercice 8. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0, $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $g\colon I \to \mathbb{R}$. Montrer que :

$$e^{f(x)} \underset{x\to 0}{\sim} e^{g(x)} \iff f(x) = g(x) + \underset{x\to 0}{o}(1).$$