Feuille d'exercices n° 1

RÉELS ET SUITES

Exercice 1.

1. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a :
$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \ \leq \ \lfloor x + y \rfloor \ \leq \ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 \ .$$
2. Montrer que, pour tout $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^\star$, on a :
$$\lfloor x \rfloor \ = \ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \ .$$

Exercice 2.

1. Pour tout $\varepsilon > 0$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :
$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| \ \leq \ \varepsilon \ .$$
2. Pour tout $R \in \mathbf{R}$, donner explicitement $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait :
$$\frac{n}{2} \ \geq \ R \ .$$

Exercice 3.

1. Soit $x \in \mathbf{Q}$, soit $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^\star$ tel que $x = \dfrac{a}{b}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, il existe $q_n \in \mathbf{Z}$ tel que $q_n \leq 10^n x < q_n + 1$.
   (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, q_n est le quotient de la division euclidienne de $10^n a$ par b.
2. En déduire l'approximation décimale par défaut et par excès à 10^{-2} près de $\dfrac{37}{105}$.
3. Donner l'écriture décimale de $\dfrac{91}{11}$.
4. (a) On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^\star$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{36}{100^k}$. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^\star}$ converge et calculer sa limite.
   (b) En déduire l'écriture de $x = 1,\overline{36} = 1,363636\ldots$ sous la forme d'une fraction irréductible.

Exercice 4.

1. Soit $x \in \mathbf{R}$, on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = \dfrac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|x_n - x| \leq \dfrac{1}{2^n}$.
   (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de rationnels qui converge vers x.
2. Soit $x \in \mathbf{R}^\star$, on pose $y = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $y_n = \sqrt{2} \dfrac{\lfloor 2^n y \rfloor}{2^n}$.
   (a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbf{N}$, tel que pour tout $n \geq N$, $y_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. *On rappelle que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*
   (b) Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers x.
3. Montrer que $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$ et que $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$.

Exercice 5. *Un exemple de suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$.*
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{u_n^2+2}$.

1. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est un rationnel positif.
2. (a) Montrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, $2|ab| \leq a^2 + b^2$.

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \leq \sqrt{2}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

Exercice 6. Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}\right)_{n\in\mathbf{N}}$
2. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\, e^{-n}\ln(1+n+e^n)\right)_{n\in\mathbf{N}}$
3. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \left(\frac{(-1)^n}{n+1}\right)_{n\in\mathbf{N}}$
4. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (n(-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}$
5. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} = (n - \ln n)_{n\in\mathbf{N}^\star}$
6. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^\star} = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbf{N}^\star}$

Exercice 7.
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que pour tout $(x,y) \in \mathbf{Q}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
On note $\lambda = f(1)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(n) = \lambda n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(n) = \lambda n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in \mathbf{Q}$, $f(nx) = nf(x)$.
4. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^\star$, $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \lambda\dfrac{p}{q}$.
5. Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = \lambda x$.