

**Feuille d'exercices n° 1**

RÉELS ET SUITES

**Exercice 1.**

1. Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ , on a :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1 .$$

2. Montrer que, pour tout  $(x, n) \in \mathbf{R} \times \mathbf{N}^*$ , on a :

$$\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor .$$

**Exercice 2.**

1. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , donner explicitement  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq n_0$ , on ait :

$$\left| \frac{2n+1}{n+1} - 2 \right| \leq \varepsilon .$$

2. Pour tout  $R \in \mathbf{R}$ , donner explicitement  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $n \geq n_0$ , on ait :

$$\frac{n}{2} \geq R .$$

**Exercice 3.**

1. Soit  $x \in \mathbf{Q}$ , soit  $(a, b) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$  tel que  $x = \frac{a}{b}$ .

(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , il existe  $q_n \in \mathbf{Z}$  tel que  $q_n \leq 10^n x < q_n + 1$ .

(b) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $q_n$  est le quotient de la division euclidienne de  $10^n a$  par  $b$ .

2. En déduire l'approximation décimale par défaut et par excès à  $10^{-2}$  près de  $\frac{37}{105}$ .

3. Donner l'écriture décimale de  $\frac{91}{11}$ .

4. (a) On note, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{36}{100^k}$ . Justifier que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$  converge et calculer sa limite.

(b) En déduire l'écriture de  $x = 1, \overline{36} = 1,363636\dots$  sous la forme d'une fraction irréductible.

**Exercice 4.**

1. Soit  $x \in \mathbf{R}$ , on pose, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ .

(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $|x_n - x| \leq \frac{1}{2^n}$ .

(b) Montrer que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est une suite de rationnels qui converge vers  $x$ .

2. Soit  $x \in \mathbf{R}$ , on pose  $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$  et pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $y_n = \sqrt{2} \frac{\lfloor 2^n y \rfloor}{2^n}$ .

(a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $y_n \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ . On rappelle que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

(b) Montrer que la suite  $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $x$ .

3. Montrer que  $\mathbf{Q}$  est dense dans  $\mathbf{R}$  et que  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  est dense dans  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 5.** Un exemple de suite de rationnels qui converge vers  $\sqrt{2}$ .

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n^2 + 2}$ .

1. Justifier que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est bien définie et que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n$  est un rationnel positif.
2. (a) Montrer que, pour tout  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ ,  $2|ab| \leq a^2 + b^2$ .  
(b) En déduire que, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $u_n \leq \sqrt{2}$ .
3. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est croissante.
4. Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $\sqrt{2}$ .

**Exercice 6.** Étudier la convergence des suites suivantes :

1.  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} = \left( \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} \right)_{n \in \mathbf{N}}$
2.  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} = (e^{-n} \ln(1 + n + e^n))_{n \in \mathbf{N}}$
3.  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} = \left( \frac{(-1)^n}{n+1} \right)_{n \in \mathbf{N}}$
4.  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} = (n(-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$
5.  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*} = (n - \ln n)_{n \in \mathbf{N}^*}$
6.  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*} = \left( (-1)^n + \frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$

**Exercice 7.**

Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue telle que pour tout  $(x, y) \in \mathbf{Q}^2$ ,  $f(x + y) = f(x) + f(y)$ .

On note  $\lambda = f(1)$ .

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $f(n) = \lambda n$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ ,  $f(n) = \lambda n$ .
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbf{N}$ , pour tout  $x \in \mathbf{Q}$ ,  $f(nx) = nf(x)$ .
4. Montrer que pour tout  $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ ,  $f\left(\frac{p}{q}\right) = \lambda \frac{p}{q}$ .
5. Montrer que pour tout  $x \in \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \lambda x$ .