Université Claude Bernard – Lyon 1 **Semestre de printemps 2022**

L1 UE : Fondamentaux des mathématiques 2

Examen final, session 2 du 28 juin

Durée 3 heures

Les documents, les téléphones, les calculatrices et les ordinateurs sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées

Exercice 1. (5 points/40points)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, l'application linéaire définie par

$$f(e_1) = e_1 + e_2 + e_3; \;\; f(e_2) = e_1 - e_3; \;\; f(e_3) = 3e_1 + 2e_2 + e_3$$

1. (1 point). Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2. (2 points). Donner une base du noyau de f.
3. (2 points). Donner une base de l'image de f.

Exercice 2. (10,5 points/40 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_C = (e_1, e_2)$ est $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

1. (1 point). Déterminer un vecteur u_1 non nul tel que $f(u_1) = u_1$.
2. (1,5 points). Déterminer un vecteur $u_2 = (x, x)$ avec $x \in \mathbb{R}$, tel que $f(u_2) = u_1 + u_2$.
3. (1,5 points). Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}_C$ à $\mathcal{B}$
4. (2 points). Donner la matrice T de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. (2 points). Calculer T^n pour tout entier $n \geq 0$.
6. (2,5 points). Exprimer A^n en fonction de P et T^n, en déduire les coefficients de la matrice A^n.

Exercice 3. (6 points/ 40 points)

Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-ensembles $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x - y + z + 3t = 0\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((1, -2, 0, -3)\big)$

1. (2 points). Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. (4 points). Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 4. (3 points/40 points)

Calculer

$$I = \int_1^2 9x^2 \ln(x)\, dx$$

Exercice 5. (6 points/40 points)

1. (1,5 points). Décomposer la fraction rationnelle $t \to \frac{t+2}{(t-1)^2}$ en éléments simples
2. (4,5 points). A l'aide du changement de variable $t = e^x$, calculer

$$J = \int_1^2 \frac{e^{2x} + 2e^x}{e^{2x} - 2e^x + 1} dx$$

Exercice 6. (4 points/40 points)

On considère l'équation différentielle $(E)\;\; y'' - 4y' + 3y = (8x - 14)e^{-x}$

1. (1 point). Résoudre l'équation homogène $y'' - 4y' + 3y = 0$.
2. (3 points). Résoudre (E).

Exercice 7. (7 points/40 points)

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{4+x}$$

1. (4 points). Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de f.
   Indications : soit on pourra factoriser par 4 et utiliser une formule du cours, soit on pourra dériver f deux fois et utiliser la formule de Taylor-Young.
2. (1,5 point). Calculer $f(x) - \left(2 + \frac{x}{4}\right)$ à l'aide du développement limité, en déduire que la droite d'équation
   $y = \frac{x}{4} + 2$ est tangente au graphe de f au voisinage de 0.
3. (1,5 point). Au voisinage de 0, préciser la position du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = \frac{x}{4} + 2$.