Examen final d'Analyse 2
corrigé

Question de cours :

Théorème des accroissements finis :

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a<b$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tq :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Exercice 1 :

1) a) La fonction f est définie sur $]-\infty,-1[\setminus \{0\}$ (et non pas sur $\mathbb{R}^*$ comme indiqué dans l'énoncé).

Pour obtenir un $DL_2(0)$ de f on fait un $DL_5(0)$ du numérateur.

On a $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$.

et $\ln(1-x) = \ln(1+(-x))$

$$= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

Donc $$f(x) = \frac{x^3\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right) + x^4\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{4}\right) + x^5\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{5}\right) + \underset{x\to 0}{o}(x^5)}{x^3}$$

Donc $$\boxed{f(x) = -\frac{1}{6} - \frac{5}{24}x - \frac{23}{120}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$$

Remarque : On peut donc prolonger par continuité la fonction f à l'intervalle $]-\infty,-1[$ tout entier en posant $f(0) = -\frac{1}{6}$.

b) On a donc $f(x) = -\frac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(1)$ donc $\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{6}}$.

c) L'équation de la tangente à C_f en 0 est donnée par la partie régulière du $DL_1(0)$ de f : $y = -\frac{1}{6} - \frac{5}{24}x$.

La position relative de la tangente et de C_f est donnée par le signe de $f(x) - \left(-\frac{1}{6} - \frac{5}{24}x\right)$ au voisinage de 0.

On a $f(x) - \left(-\frac{1}{6} - \frac{5}{24}x\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{23}{120}x^2$. Comme $-\frac{23}{120}x^2$ est négatif au voisinage de 0, $f(x) - \left(-\frac{1}{6} - \frac{5}{24}x\right)$ est négatif au voisinage de 0 et la tangente est en dessous de C_f au voisinage de 0.

2) La fonction $\varphi : x \mapsto \cos(x)$ est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$. On peut donc faire le changement de variable $t = \varphi(x) = \cos(x)$.

On a alors $dt = \varphi'(x)\,dx = -\sin(x)\,dx$.

De plus $x = 0 \Rightarrow t = \cos(0) = 1$ et $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\,dx}{1+\cos^2(x)} = \int_1^0 \frac{-dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(1) - \arctan(0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}.$$

3)a) L'équation caractéristique associée à la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_n}{4}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

est $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0$.

Or $r^2 - r + \frac{1}{4} = \left(r - \frac{1}{2}\right)^2$ donc l'équation a une racine double qui est $\frac{1}{2}$.

On en déduit qu'il existe λ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$u_n = \lambda\left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu n\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On détermine λ et μ grâce aux conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \iff \lambda = 0 \\ u_1 = 1 \iff \frac{\mu}{2} = 1 \end{cases}$$

Donc $\boxed{u_n = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.}$

b) Par croissance comparée on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

2) Pour $x = 0$ l'inégalité est vraie.

Soit $x \in]0, \pi/2]$. Comme $\sin \in \mathcal{C}^3([0,x], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}^4(]0,x[, \mathbb{R})$ (puisque sin est infiniment dérivable), il existe $c_x \in]0,x[$ telle que

$$\sin(x) = \sin(0) + \sin'(0)x + \frac{\sin''(0)}{2!}x^2 + \frac{\sin^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin^{(4)}(c_x)}{4!}x^4.$$

Comme $\sin' = -\cos$, $\sin'' = -\sin$, $\sin^{(3)} = \cos$ et $\sin^{(4)} = \sin$ on a :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin(c_x)}{4!}x^4.$$

Comme $c_x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\sin(c_x) \geq 0$ donc $\sin(x) \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Exercice 2 :

1) Pour tout $x \in [0,2]$ on a $|x| \leqslant 2$ et $-1 \leqslant 1 - x \leqslant 1$.

Donc pour tout $x \in [0,2]$, $|g(x)| = |x(1-x)| = |x| \cdot |1-x| \leqslant 2$.

2) Comme g est continue sur $[0,2]$ (c'est une fonction polynomiale) elle admet des primitives sur $[0,2]$. Ces primitives sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$, avec $C \in \mathbb{R}$.

On a $f(2) = 0 \iff 2 - \frac{8}{3} + C = 0 \iff C = \frac{2}{3}$. Donc la primitive de g qui s'annule en 2 est la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}$.

3)a) On fait une intégration par parties dans I_n.

Les fonctions f et $u : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{n}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,2]$

avec, $\forall x \in [0,2]$ $f'(x) = g(x)$ et $u'(x) = \cos(nx)$. Donc :

$$I_n = \int_0^2 f(x)\cos(nx)dx$$

$$= \int_0^2 f(x)\, u'(x)\, dx$$

$$= [f(x)\, u(x)]_0^2 - \int_0^2 f'(x)\, u(x) dx$$

$$= \underbrace{f(2)}_{=0} \frac{\sin(2n)}{n} - f(0) \underbrace{\frac{\sin(0)}{n}}_{=0} - \int_0^2 g(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx$$

$$= -\int_0^2 g(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx$$

b) On a $|I_n| = \left| \int_0^2 g(x) \frac{\sin(nx)}{n} dx \right|$

$\leq \int_0^2 |g(x)| \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| dx$ par l'inégalité triangulaire

$\leq \int_0^2 2 . \frac{1}{n} dx$ car $\forall x \in [0,2]$, $|g(x)| \leq 2$ et $|\sin(nx)| \leq 1$

$\leq \frac{2}{n} \int_0^2 1 dx = \frac{4}{n}$.

c) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$.

Par encadrement on obtient que $|I_n| \to 0$ c'est-à-dire

$\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3 :

1) g est une fonction polynomiale. Elle est donc dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad g'(x) = 24x^2 - 6$$

2) Par tout $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = 24\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) = 24\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Donc g' s'annule en $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{2}$ et $g'(x) < 0 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$.

De plus $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{6}{2} + 1 = -\frac{8}{8} + 3 + 1 = 3$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{6}{2} + 1 = \frac{8}{8} - 3 + 1 = -1$$

Enfin, $g(x) \underset{+\infty}{\sim} 8x^3$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$$g(x) \underset{-\infty}{\sim} 8x^3 \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty.$$

Le tableau de variation de g est donc donné par :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		α		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3) g est continue sur $[0, \frac{1}{4}]$, $g(0) = 1 > 0$ et $g\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{8}{4^3} - \frac{6}{4} + 1 = -\frac{3}{8} < 0$.

Donc par le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule sur $]0, \frac{1}{4}[$.

Comme g est <u>strictement décroissante</u> sur $[0, \frac{1}{4}]$ d'après le tableau de variation, g ne peut s'annuler qu'une seule fois sur cet intervalle.

Donc il existe un unique $\alpha \in [0, \frac{1}{4}]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

4) a) On a $u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{1}{6}$

$$u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{3} \times \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{4}{3} \times \frac{1}{6^2} + 1\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{\cancel{4}}{3} \times \frac{1}{\cancel{2^2}.3^2} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{27} + 1\right) = \frac{1}{6} \frac{28}{27} = \frac{14}{3.27} = \frac{14}{81}$$

b) On a $x \in I$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq x^3 \leq \frac{1}{4^3} \quad \text{car } x \mapsto x^3 \text{ est croissante}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{4}{3}x^3 \leq \frac{4}{3}\frac{1}{4^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} \leq f(x) \leq \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6}$$

Or $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3 \times 16} + \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1+8}{3 \times 16} = \frac{9}{3 \times 16} = \frac{3}{16}$ et $\frac{3}{16} < \frac{1}{4} = \frac{4}{16}$.

Donc $x \in I \Rightarrow \frac{1}{6} \leq f(x) < \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) \in I$.

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6} = x \overset{\times 6}{\Leftrightarrow} 8x^3 + 1 = 6x \Leftrightarrow 8x^3 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

Donc x est un point fixe de f si et seulement si $g(x) = 0$. Comme on a vu à la question 2) que α est l'unique zero de g dans I, α est l'unique point fixe de f dans I.

d) f est dérivable car c'est une fonction polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 4x^2$.
Sur $I = [0, \frac{1}{4}]$ la fonction f' est croissante (car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$)

Donc pour tout $x \in I$, $f'(0) \leq f'(x) \leq f'\left(\frac{1}{4}\right)$ c'est-à-dire $0 \leq f'(x) \leq 4 \times \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4}$.

Donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$, $\forall x \in I$.

e) Montrons par récurrence que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons H_n la propriété " $u_n \in I$ ".

Initialisation : $u_0 = 0$ et $0 \in I$ donc H_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et montrons qu'alors H_{n+1} est vraie.

$u_n \in I \Rightarrow f(u_n) \in I$ (par la question 4b) $\Rightarrow u_{n+1} \in I$

Donc H_{n+1} est vraie.

Conclusion : par le principe de récurrence $u_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

f) Comme $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in I$, l'inégalité des accroissements finis donne que $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4}|x-y|$, $\forall x, y \in I$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $u_n \in I$ et $\alpha \in I$ on a alors :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \quad \text{c-a-d} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

g) Montrons que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, notons H_n la propriété " $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$ ".

Initialisation : $|u_0 - \alpha| = \alpha$ et $\alpha \leq \frac{1}{4}$ car $\alpha \in I$ donc H_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et montrons qu'alors H_{n+1} est vraie.

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n} \Rightarrow |u_{n+1} - \alpha| \underset{\text{par 4f}}{\leq} \frac{1}{4}|u_n - \alpha| \underset{\text{par } H_n}{\leq} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{1}{4^{n+2}} \quad \text{donc } H_{n+1} \text{ est vraie}$$

Conclusion : par le principe de récurrence $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ c-à-dire $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

4) Une condition suffisante pour avoir $|u_n - \alpha| \leq 10^{-10}$ est $\frac{1}{4^{n+1}} \leq 10^{-10}$

Or $\frac{1}{4^{n+1}} \leq 10^{-10} \iff 10^{10} \leq 4^{n+1}$

$\iff 10 \ln 10 \leq (n+1) \ln 4$ car $\ln$ est croissante

$\iff 10 \frac{\ln 10}{\ln 4} - 1 \leq n.$

Comme $15 < 10 \frac{\ln 10}{\ln 4} - 1 < 16$, il suffit de choisir $n = 16$ pour s'assurer que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-10}$.

5) La commande Suite(f,0,3) renvoie un tableau numpy contenant les 4 premiers termes u_0, u_1, u_2, u_3 de la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6) a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par la formule d'Euler et la formule du binôme de Newton on a :

$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{(e^{i\theta} - e^{-i\theta})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i}$$

$$= \frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{-8i} - 3\,\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{-8i}$$

$$= -\frac{1}{4}\,\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} + \frac{3}{4}\,\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = -\frac{1}{4}\sin(3\theta) + \frac{3}{4}\sin(\theta)$$

b) Par tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\sin^3(\theta) = \frac{3}{4}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(3\theta) \iff \sin^3(\theta) - \frac{3}{4}\sin(\theta) + \frac{1}{4}\sin(3\theta) = 0$$

$$\iff 8\sin^3(\theta) - 6\sin(\theta) + 2\sin(3\theta) = 0$$

c) Si θ est tel que $\sin(3\theta) = \frac{1}{2}$ alors $g(\sin(\theta)) = 0$.

On a $\sin(3\theta) = \frac{1}{2} \iff 3\theta = \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \iff \theta = \frac{\pi}{18}\ [\frac{2\pi}{3}]$.

Donc $\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ (on peut vérifier que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) \in I$).