Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info — UE : Analyse 2 pour mathématiciens

Examen final - 10 mai 2023, 8h

Durée 2H

Avertissement : *Une attention particulière sera prêtée à la qualité de la rédaction. Toute réponse doit être justifiée et formulée sous la forme d'une phrase écrite en français (sujet, verbe, complément). Tous les appareils électroniques sont interdits. Le barème est donné à titre* **indicatif**.

Question de cours (1 point) : Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 1 (7 points) : Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}^*$ on définit :
$$f(x) = \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{x^3}.$$
   (a) Établir un développement limité de f à l'ordre 2 en $x = 0$.
   (b) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0.
   (c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en 0 ainsi que la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente au voisinage de 0.
2. À l'aide du changement de variable $t = \cos(x)$ calculer l'intégrale
$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \mathrm{d}x.$$
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0, \ u_1 = 1, \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{u_n}{4}, \quad \forall n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$
   (a) Exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
   (b) Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
4. Soit $x \in [0, \pi/2]$. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre l'ordre 4, montrer que
$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x).$$

Exercice 2 (4 points) : Soit $g : [0,2] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x(1-x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, $|g(x)| \leq 2$.
2. Montrer que g admet des primitives sur $[0,2]$. Déterminer $f : [0,2] \to \mathbf{R}$ la primitive de g qui s'annule en 2.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note
$$I_n = \int_0^2 f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x.$$
   (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $I_n = -\displaystyle\int_0^2 g(x)\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|I_n| \leq \dfrac{4}{n}$.
   (c) Que peut-on en déduire sur la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$?

<u>Exercice 3</u> (10 points) : Dans cet exercice, on s'intéresse à l'équation du troisième degré suivante :

$$8x^3 - 6x + 1 = 0, \quad x \in \mathbf{R} \qquad (E)$$

1. Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 8x^3 - 6x + 1$. Montrer que g est dérivable et donner l'expression de $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Montrer que l'équation (E) a une unique solution α dans l'intervalle $I = [0, \frac{1}{4}]$. Placer α dans le tableau de variation de g.
4. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{6}$. On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

   (a) Calculer u_1 et u_2.

   (b) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.

   (c) Montrer que α est l'unique point fixe de f dans I.

   (d) Montrer que f est dérivable et que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

   (e) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$.

   (f) Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

   (g) Montrer que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

   (h) Déterminer la valeur d'un entier n tel que u_n soit une approximation à 10^{-10} près de α.
   On admettra que $1.6 < \ln 10 / \ln 4 < 1.7$.

5. On considère le code Python suivant :

```
import numpy as np

def f(x):
    return 4/3*x**3+1/6

def Suite(f, u0, n):
    u=u0
    U= np.array([u])
    for k in range(n):
        u=f(u)
        U=np.append(U,u)
    return U
```

   Que renvoie la commande `Suite(f,0,3)` ?

6. On souhaite déterminer la valeur exacte de α à l'aide d'une fonction usuelle.

   (a) A l'aide de la formule d'Euler $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, montrer que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$

$$\sin^3(\theta) = \frac{3}{4}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(3\theta).$$

   (b) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbf{R}$

$$8\sin^3(\theta) - 6\sin(\theta) + 2\sin(3\theta) = 0.$$

   (c) En déduire la valeur exacte de α.