
Contrôle continu n° 4
MERCREDI 5 AVRIL 2023 - DURÉE : 1 H 30

Question de cours.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f\colon I \to \mathbf{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable et convexe sur I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f sur I.

1. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0.
2. Soit $x \in I$. Justifier que si $x \geq x_0$ alors $f'(x) \geq f'(x_0)$, et si $x \leq x_0$ alors $f'(x) \leq f'(x_0)$.
3. On définit $g\colon I \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$. En étudiant la fonction g, montrer que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x_0.

Exercice 1. Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.

1. Étudier la limite quand $x \to 0$ de $f(x) = \dfrac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x^3}$.
2. (a) Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et x pour la fonction $t \mapsto \ln(1-t)$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|\ln(1-x) + x| \leq 2x^2$.
3. (a) Montrer que la fonction $-\sin$ est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
   (b) En déduire que pour tout $t \in [0, 1]$, $\sin\left(t\dfrac{\pi}{2}\right) \geq t$.
   (c) En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x$.

Exercice 2. Soit $f\colon]1, +\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer f'.
2. Déterminer les limites de f en 1^+ et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variations de f.
3. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 quand $x \to +\infty$ de $\dfrac{1}{x-1}$.
   (b) Déterminer des constantes réelles a, b et c telles que f admette un développement asymptotique en $+\infty$ de la forme :
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right), \text{ avec } c > 0.$$
4. Déterminer l'équation d'une droite asymptote à la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$, au voisinage de $+\infty$. Étudier la position relative de cette droite et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.
On définit $g\colon [0,1] \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(1-x) - f(x)$.

1. Justifier que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.
2. Calculer g' et g'' en fonction des dérivées de f.
3. Calculer $g(0)$, $g'(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
4. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe $c \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $g''(c) = -8$.
5. En déduire qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $|f''(\alpha)| \geq 4$.