Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info UE : Analyse 2 pour mathématiciens

Corrigé du contrôle continu n° 4

Mercredi 5 avril 2023 - Durée : 1 h 30

Question de cours.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Soit $f\colon I \to \mathbf{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est dérivable et convexe sur I. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f sur I.

1. *Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0.*

   L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

2. *Soit $x \in I$. Justifier que si $x \geq x_0$ alors $f'(x) \geq f'(x_0)$, et si $x \leq x_0$ alors $f'(x) \leq f'(x_0)$.*

   Comme f est convexe, sa dérivée f' est croissante. Ainsi, si $x \geq x_0$ alors $f'(x) \geq f'(x_0)$, et si $x \leq x_0$ alors $f'(x) \leq f'(x_0)$.

3. *On définit $g\colon I \to \mathbf{R},\ x \mapsto f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$. En étudiant la fonction g, montrer que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x_0.*

   La fonction g est la somme de f et d'une fonction affine donc g est dérivable sur I. De plus, pour tout $x \in I$, $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$.

   Par la question précédente, on en déduit que pour tout $x \in I$, si $x \geq x_0$, alors $g'(x) \geq 0$, et si $x \leq x_0$, alors $g'(x) \leq 0$. Ainsi, g est décroissante sur $I \cap]-\infty, x_0]$ et croissante sur $I \cap]x_0, +\infty[$. On en déduit que pour tout $x \in I$, $g(x) \geq g(x_0)$. Comme $g(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$, g est positive sur I.

   À la question 1, on a rappelé que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, on conclut donc que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse x_0.

Exercice 1. *Les questions 1, 2 et 3 de cet exercice sont indépendantes.*

1. *Étudier la limite quand $x \to 0$ de $f(x) = \dfrac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x^3}$.*

   $\cos(2x) - 1 + 2x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc on a une forme indéterminée à étudier. On écrit le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\cos(2x)$:

   $$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3) = 1 - 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

   donc $\cos(2x) - 1 + 2x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et

   $$f(x) = \frac{\cos(2x) - 1 + 2x^2}{x^3} = \underset{x\to 0}{o}(1)$$

   Ainsi, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

2. (a) *Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et x pour la fonction $t \mapsto \ln(1 - t)$.*

La fonction $t \mapsto 1-t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \frac{1}{2}]$, et pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, on a $1-t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Comme ln est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, on en déduit que la fonction $h\colon t \mapsto \ln(1-t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.

Par la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c_x \in [0, x]$ tel que

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \frac{h''(c_x)}{2}x^2$$

De plus pour tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$, $h'(t) = \dfrac{-1}{1-t}$ et $h''(t) = \dfrac{-1}{(1-t)^2}$ donc $h(0) = 0$, $h'(0) = -1$ et

$$h(x) = -x - \frac{1}{2(1-c_x)^2}x^2$$

(b) *En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $|\ln(1-x) + x| \leq 2x^2$.*

Soit $x \in [0, \frac{1}{2}]$, on a par la question précédente,

$$|\ln(1-x) + x| = \left|\frac{-1}{2(1-c_x)^2}x^2\right| = \frac{1}{2(1-c_x)^2}x^2$$

De plus, $0 \leq c_x \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2} \leq 1 - c_x \leq 1$. Ainsi, la fonction $t \mapsto t^2$ étant croissante sur $\mathbf{R}^+$, on a $(1-c_x)^2 \geq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} > 0$. Comme $t \mapsto 1/t$ étant décroissante sur $]0, +\infty[$, on obtient $\dfrac{1}{(1-c_x)^2} \leq 4$. Ainsi,

$$|\ln(1-x) + x| \leq \frac{4}{2}x^2 = 2x^2$$

3. (a) *Montrer que la fonction $-\sin$ est convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.*

On note $g = -\sin$. Alors g est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = -\cos x$, et $g''(x) = \sin x$. Ainsi, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $g''(x) \geq 0$. La fonction g est donc convexe sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) *En déduire que pour tout $t \in [0, 1]$, $\sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) \geq t$.*

Soit $t \in [0, 1]$, par convexité de g sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$g\left((1-t) \times 0 + t\frac{\pi}{2}\right) \leq (1-t)g(0) + tg\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

Comme $g(0) = -\sin(0) = 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, on en déduit

$$-\sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) \leq -t$$

ce qui équivaut à

$$\sin\left(t\frac{\pi}{2}\right) \geq t$$

(c) *En déduire que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin(x) \geq \dfrac{2}{\pi}x$.*

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose $t = \dfrac{x}{\pi/2} = \dfrac{2}{\pi}x$. Alors $t \in [0, 1]$ et $x = t\dfrac{\pi}{2}$ donc par la question précédente, on a $\sin\left(t\dfrac{\pi}{2}\right) \geq t$, ce qui se réécrit

$$\sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$$

<u>**Exercice 2.**</u> *Soit* $f\colon]1,+\infty[\to \mathbf{R},\ x \mapsto (x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$.

1. *Justifier que* f *est dérivable sur* $]1,+\infty[$ *et calculer* f'.

   $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et exp est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc par composition, $x \mapsto e^{\frac{1}{x-1}}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$. De plus, $x \mapsto (x+1)$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ donc par produit, f est dérivable sur $]1,+\infty[$. De plus pour tout $x \in]1,+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x-1}}\left(1+(x+1)\times\frac{-1}{(x-1)^2}\right)\\ &= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}\big((x-1)^2-(x+1)\big) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}(x^2-3x)\\ &= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}x(x-3) \end{aligned}$$

2. *Déterminer les limites de* f *en* 1^+ *et en* $+\infty$ *puis dresser le tableau de variations de* f.

   On a $\dfrac{1}{x-1} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty$ donc $e^{\frac{1}{x-1}} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty$ et comme $x+1 \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} 2$, on en déduit que $f(x) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

   On a $\dfrac{1}{x-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $e^{\frac{1}{x-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$ et comme $x+1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Le calcul de f' à la question précédente montre que $f(x)$ est du signe de $x(x-3)$, on obtient donc le tableau de variation suivant :

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) *Calculer le développement limité à l'ordre* 2 *quand* $x \to +\infty$ *de* $\dfrac{1}{x-1}$.

   Soit $x > 1$, on pose $h = \dfrac{1}{x}$, on a $h \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= \frac{1}{\frac{1}{h}-1} = \frac{h}{1-h}\\ &= h\left(1+h+\underset{h\to0}{o}(h)\right)\\ &= h+h^2+\underset{h\to0}{o}(h^2)\\ &= \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

   (b) *Déterminer des constantes réelles* a, b *et* c *telles que* f *admette un développement asymptotique en* $+\infty$ *de la forme :*

$$f(x) = ax+b+\frac{c}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right),\ \text{avec } c>0.$$

On utilise le DL obtenu à la question précédente :

$$f(x) = (x+1)\exp\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

Or, $u = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc on peut utiliser le développement de e^u quand $u \to 0$; à l'ordre 2, on a

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$$

donc

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x + 1 + \frac{3}{2x} + 1 + \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x + 2 + \frac{5}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

4. *Déterminer l'équation d'une droite asymptote à la courbe représentative de f, $\mathcal{C}_f$, au voisinage de $+\infty$. Étudier la position relative de cette droite et $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.*

   On a

$$\begin{aligned} f(x) - (x+2) &= \frac{5}{2x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{5}{2x} \end{aligned}$$

   donc $f(x) - (x+2) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$: la droite (D) d'équation $y = x+2$ est donc asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.
   De plus, $f(x) - (x+2)$ est du signe de $\dfrac{5}{2x}$ au voisinage de $+\infty$ donc positif. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (D) au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.

Soit $f\colon [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$ et $f'(1) = 0$.
On définit $g\colon [0,1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(1-x) - f(x)$.

1. *Justifier que g est bien définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.*

   Pour tout $x \in [0,1]$ on a $1 - x \in [0,1]$ donc g est bien définie sur $[0,1]$. De plus, f et $x \mapsto 1-x$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$.

2. *Calculer g' et g'' en fonction des dérivées de f.*

   Pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(1-x) - f'(x) \\ g''(x) &= f''(1-x) - f''(x) \end{aligned}$$

3. *Calculer $g(0)$, $g'(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.*

On a

$$
\begin{aligned}
g(0) &= f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1 \\
g'(0) &= -f'(1) - f'(0) = -0 - 0 = 0 \\
g\left(\frac{1}{2}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) = 0
\end{aligned}
$$

4. *En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer qu'il existe* $c \in]0, \frac{1}{2}[$ *tel que* $g''(c) = -8$.

   Comme g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, par la formule de Taylor-Lagrange, il existe $c \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que

$$
g\left(\frac{1}{2}\right) = g(0) + g'(0) \times \frac{1}{2} + \frac{g''(c)}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2
$$

   donc $0 = 1 + \dfrac{g''(c)}{8}$ et $g''(c) = -8$.

5. *En déduire qu'il existe* $\alpha \in [0,1]$ *tel que* $|f''(\alpha)| \geq 4$.

   Supposons par l'absurde que pour tout $\alpha \in [0,1]$, $|f''(\alpha)| < 4$. Alors, on a

$$
\begin{aligned}
|g''(c)| &= |f''(1-c) - f''(c)| \\
&\leq |f''(1-c)| + |f''(c)| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\
&< 4 + 4 = 8
\end{aligned}
$$

   ce qui est une contradiction. Ainsi, il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $|f''(\alpha)| \geq 4$.