Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info | UE : Analyse 2 pour mathématiciens

Contrôle continu n° 3

MERCREDI 22 MARS 2023 - DURÉE : 45MIN

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Dans toutes les questions, il sera tenu le plus grand compte de la rigueur de la rédaction ; **toute réponse insuffisamment justifée sera considérée comme nulle.** *Les exercices sont indépendants.*

Question de cours.

Soit $f\colon I \to \mathbf{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, c'est-à-dire qu'il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \underset{x \to x_0}{o}(x - x_0)\,.$$

Montrer que f est dérivable en x_0 et déterminer $f'(x_0)$.

Exercice 1. Soit $f :]-1, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x\,\cos(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f admet un développement limité à l'ordre deux en $x = 0$ de la forme :

   $$f(x) = 1 + ax + bx^2 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right),$$

   avec $a < 0$ et $b > 0$.
2. Montrer que f est continue sur $]-1, \frac{\pi}{2}[$.
3. Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
5. Déterminer la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Exercice 2. Établir un développement limité à l'ordre 2 au **voisinage de** $x = 1$ (et non pas de zéro !) de

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Exercice 3. Déterminer, si elle est existe, la limite suivante

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^4}.$$