Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info | UE : Analyse 2 pour mathématiciens

Corrigé du Contrôle continu n° 3

Mercredi 22 mars 2023 - Durée : 45min

Question de cours.

Soit $f\colon I \to \mathbf{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0, c'est-à-dire qu'il existe $l \in \mathbf{R}$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + l(x - x_0) + \underset{x\to x_0}{o}(x - x_0)\,.$$

Montrer que f est dérivable en x_0 et déterminer $f'(x_0)$.

Si f admet le développement limité ci-dessus alors pour $x \in I\backslash\{x_0\}$ on a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l + \underset{x\to x_0}{o}(1)\,.$$

On en déduit que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \left(l + \underset{x\to x_0}{o}(1)\right) = l.$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

Exercice 1. Soit $f :]-1, \frac{\pi}{2}[\to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)}{x\,\cos(x)} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que f admet un développement limité à l'ordre deux en $x = 0$ de la forme :*

$$f(x) = 1 + ax + bx^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right),$$

avec $a < 0$ et $b > 0$.

On commence par faire le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\frac{\ln(1+x)}{x}$. Comme le numérateur et le dénominateur s'annulent en $x = 0$, il faut faire un développement limité à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$ pour avoir un développement limité à l'ordre 2 de $\frac{\ln(1+x)}{x}$. On a donc

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o_{x\to 0}\left(x^3\right)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).$$

A présent, on détermine le développement limité à l'ordre 2 en zéro de $\frac{1}{\cos(x)}$. Comme $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)$, on a

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)}.$$

Posons $u(x) = \frac{1}{2}x^2 - o_{x\to 0}\left(x^2\right)$. Comme $u(0) = 0$ on obtient le développement limité à l'ordre 2 de $\frac{1}{\cos(x)}$ en composant le développement limité à l'ordre 2 de $u(x)$ et celui de $\frac{1}{1-x}$ et en ne gardant dans la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à deux. Comme $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o_{x\to 0}\left(x^2\right)$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 - \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)^2}_{=o_{x\to 0}(x^2)} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

En obtient le développement limité de $f(x)$ en zéro à l'ordre deux en multipliant les développements limités de $\frac{\ln(1+x)}{x}$ et de $\frac{1}{\cos(x)}$ et en ne gardant dans la partie régulière que les termes de degré inférieur ou égal à deux :

$$\begin{aligned}f(x) &= \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right).\end{aligned}$$

2. *Montrer que f est continue sur* $]-1, \frac{\pi}{2}[$.

   La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie et continue sur $]-1, \frac{\pi}{2}[$. La fonction $x \mapsto x\cos(x)$ est définie et continue sur $]-1, \frac{\pi}{2}[$ et ne s'annule qu'en $x = 0$. La fonction f est donc continue en tout point de $]-1, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}[$ comme produit de fonctions continues. Étudions sa continuité en $x = 0$. D'après le développement limité obtenu à la question précédente, on a

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) = 1 = f(0).$$

   Donc f est continue en zéro. En conclusion f est continue sur $]-1, \frac{\pi}{2}[$.

3. *Montrer que f est dérivable en* 0 *et donner la valeur de* $f'(0)$.

   Comme f admet un développement limité à l'ordre 1 en zéro (obtenu en tronquant à l'ordre 1 son développmement limité à l'ordre 2), elle est dérivable en zéro et sa dérivée est $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

4. *Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse* 0.

   L'équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de f en zéro est donnée par la partie régulière du développement limité à l'ordre 1 en zéro :

$$y = 1 - \frac{1}{2}x.$$

5. *Déterminer la position relative de la courbe représentative de f par rapport à cette tangente au voisinage de* 0.

   On étudie le signe $f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$ au voisinage de 0. On a

$$f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) = \frac{5}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

   donc $f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \sim_{x\to 0} \frac{5}{6}x^2$. Comme $x \mapsto \frac{5}{6}x^2$ est positive au voisinage de 0, on en déduit que $x \mapsto f(x) - \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$ est positive au voisinage de 0. La courbe représentative de f est donc au-dessus de sa tangente en 0 au voisinage de 0 (remarque : loin de 0, on ne peut rien dire sur la position relative de ces deux courbes).

<u>Exercice 2.</u> *Établir un développement limité à l'ordre 2* **voisinage de** $x = 1$ *(et non pas de zéro !) de*

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Pour h dans un voisinage de zéro, posons $g(h) = f(1+h)$. Alors f admet un développement limité à l'ordre 2 en $x = 1$ si et seulement si g admet un développement limité à l'ordre 2 en $h = 0$. Déterminons le développement limité à l'ordre 2 en $h = 0$ de g :

$$g(h) = f(1+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}}.$$

En prenant $u = \frac{h}{2}$ dans le développement limité à l'ordre de 2 en zéro $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o_{u\to 0}\left(u^2\right)$ (on a bien $u = 0$ lorsque $h = 0$) on obient :

$$g(h) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}h + \frac{1}{8}h^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right).$$

Comme $f(x) = g(x-1)$, on en déduit le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{o}\left((x-1)^2\right).$$

<u>Exercice 3.</u> Déterminer, si elle est existe, la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^4}.$$

Comme il y a x^4 au dénominateur, on fait un développement limité à l'ordre 4 du numérateur. Le développement limité à l'ordre 2 en $u = 0$ de $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$ est donné par :

$$(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)u + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right)u^2 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right) = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right).$$

En prenant $u = x^2$ (on a bien $u = 0$ si $x = 0$) on obtient un développement limité à l'ordre 4 en zéro de $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$:

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

On en déduit que :

$$\cos(x) - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)\right) = -\frac{1}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right).$$

Donc

$$\frac{\cos(x) - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{3} + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

donc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}}{x^4} = -\frac{1}{3}.$$