
Exos d'Annales

Exercice 1. (Annale 2021)

1. Étudier la limite de $f\colon x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ au point 1.
2. On considère $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.
   Déterminer en quels points la fonction f est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 2. (Annale 2021)
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0,1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{u_n^2}{4}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq 1$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si elle converge, déterminer sa limite.

Exercice 3. (Extrait annale 2021) Notons $\mathscr{D} = [0, +\infty[$ et considérons l'application $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$,
$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ On note $\mathscr{C}$ le graphe de f.

1. Donner un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
2. Étudier la limite de f en $+\infty$.
3. (a) Étudier la continuité de f sur $\mathscr{D}$.
   (b) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathscr{D}$.
4. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 4. (Annale 2022)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = e^x - (2 + x^{n+1}).$$

On rappelle une approximation de $\ln 2$ *à* 10^{-2} *près :* $\ln 2 \simeq 0.69$.

1. Justifier que f_1 est deux fois dérivable et calculer f_1' et f_1''.
2. Établir un tableau de variations de f_1.
3. On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = f_1(x) - x$. Montrer que g change de monotonie en $x = 0$ et aussi en $x_0 > 0$, pour un certain $x_0 > \ln 2$, qu'on ne cherchera pas à déterminer.
4. En déduire que f_1 a un unique point fixe dans $\mathbb{R}$.
5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n a au moins un point fixe dans $\mathbb{R}_+$.