
Examen final du 20 mai 2022

Durée : 3 heures

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.

Le nombre total de points obtenus formera une note sur 20.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 (3 pts) On considère l'application $u\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$u(x, y, z) = (x - 3y + 3z, 2x - 7y + 8z, x - 4y + 5z).$$

a. (0.5 pts) Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

b. (0.5 pts) Quelle est la matrice A de l'endomorphisme u dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$?

c. (1 pt) Donner une base du noyau de u.

d. (0.5 pts) Quel est le rang de u ?

e. (0.5 pts) Donner une base de l'image de u.

Exercice 2 (3.5 pts)

Soient $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a. (0.5 pts) Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

b. (1 pt) Calculer $D = P^{-1}AP$ puis D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

c. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0 = b_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = -3a_n - 2b_n \\ b_{n+1} = 10a_n + 6b_n \end{cases}, \quad \text{pour tout entier } n \in \mathbb{N}.$$

(a) (1 pt) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) (1 pt) Calculer a_n et b_n explicitement en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (3 pts) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$, on considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0 \quad \text{et} \quad P'(1) = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}(X^3 - X - 1, X^2 + 1).$$

a. (0.5 pts) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

b. (1 pt) Déterminer une base de F.
Indication : Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, quelles sont les équations que les réels a, b, c, d doivent satisfaire pour que $P \in F$?

c. (1.5 pts) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4 (3 pts)

a. (0.5 pts) Factoriser sur $\mathbb{R}$ le polynôme suivant

$$P(X) = X^3 - X^2 + X - 1.$$

b. (1 pt) Donner la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ de la fraction rationelle suivante

$$F(X) = \frac{3X+1}{X^3 - X^2 + X - 1}.$$

c. (1.5 pts) Calculer

$$I = \int_2^3 F(x)dx\,.$$

Exercice 5 (1.5 pts) Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin(x)\, dx\ .$$

Exercice 6 (2 pts) En utilisant un développement limité, calculer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos(x)) + \frac{x^2}{2}}{x^4}.$$

Exercice 7 (2.5 pts)

a. (0.5 pt) Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_0)\colon \quad y' - \frac{1}{2(x+1)}\, y = 0.$$

b. (1 pt) À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1+t}$, calculer

$$\lambda(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$$

pour tout $x \in [0, +\infty[$.

c. (1 pt) Résoudre sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y' - \frac{1}{2(x+1)}\, y = x.$$

Exercice 8 (1.5 pts)

Déterminer la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 5y = 0, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 5. \end{cases}$$

On prendra soin de donner une expression réelle de la solution.