Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info — UE : Analyse 2 pour mathématiciens

Contrôle continu n° 2

MERCREDI 1$^{\text{ER}}$ MARS 2023 - DURÉE : 1H30

Question de cours. Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice d'application du cours. Dans toute cette partie, $f: I \to \mathbf{R}$ est une fonction dérivable, avec $I \subset \mathbf{R}$ précisé à chaque question.

1. On suppose ici $I = \mathbf{R}$. Montrer soigneusement qu'on a l'implication suivante :
$$\Big[\forall x \in I\,,\ f'(x) > 0\Big] \implies \Big[f \text{ est strictement croissante sur } I\Big]. \qquad (\star)$$
Indication : pour $x < y$, on pourra appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$.
2. On suppose maintenant $I = \mathbf{R}^*$. L'implication $(\star)$ est-elle vraie en général ? Justifier.
3. Réciproquement, si f est une fonction strictement croissante sur $I = \mathbf{R}$, a-t-on nécessairement que, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$? Justifier.

Exercice 1. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
2. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$ de $f(x) = 2^x + x^7 + e^{8x}$.
3. Donner un équivalent simple quand $x \to +\infty$ de $f(x) = \sqrt{x + \sin(x^2)}$.

Exercice 2. On considère les fonctions

$$f: \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2 - 2e^{-x} \end{array} \qquad \text{et} \qquad g: \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x\,. \end{array}$$

On rappelle que $2 < e < 3$ et $\ln 2 < 1$.

1. Étude de la fonction g.
   (a) Étudier la limite de g en $+\infty$.
   (b) Dresser le tableau de variation de g.
2. (a) Montrer qu'il existe un unique $a > 0$ tel que $g(a) = 0$.
   (b) Montrer que $1 < a < 2$.
3. (a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet a pour unique solution strictement positive.
   (b) Montrer que $f(1) > 1$.
4. Dresser le tableau de variation de f en faisant apparaître le réel a.
5. Montrer que pour tout $x \in [1, a]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{2}{e}$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [1, a]$.

7. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$|u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right) |u_n - a| \,.$$

   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$.

   (c) Montrer la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vers a.

Exercice 3.

1. La fonction $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ x \mapsto |x|$ est-elle dérivable en 0 ? Justifier.
2. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $f(x) = (1 - |x|)\sqrt{1 + 2|x|}$.
   (a) Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.
   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$f'(x) = \frac{-3x}{\sqrt{1 + 2|x|}}$$

   (d) On se propose enfin d'étudier la dérivabilité de f en 0.
      i. Étudier l'existence de la limite de $f'(x)$ quand $x \to 0$, $x \neq 0$.
      ii. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.