

CC1 n° 1

MERCREDI 8 FÉVRIER 2023 - DURÉE : 45MIN

Question de cours.

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a , et $\ell \in \mathbf{R}$. On suppose $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$.
 Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Exercice 1.

Soit $x \in \mathbf{R}$, on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers x .
3. Calculer l'approximation décimale par défaut à 10^{-2} près de $\frac{27}{13}$.

Exercice 2. Déterminer la limite éventuelle de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ comme suit :

$$u_n = \frac{2^n + \sin n}{3^n + \sin n}$$

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 + x + x^2 + x^3| \leq 4$.
2. En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 - x^4| \leq 4|1 - x|$.

Exercice 4. Pour chacune des propositions suivantes, décider si elle est vraie ou fausse. Justifier.

- | | |
|---|---|
| 1. $x^2 + 1 = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(x^2)$, | 3. $\ln x = \underset{x \rightarrow +\infty}{o}(x)$, |
| 2. $x = \underset{x \rightarrow 0}{o}(e^x)$, | 4. $\ln(1 + x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, |

Exercice 5. Pour tout x réel non nul, on définit $f(x) = \lfloor x + \frac{2}{x} \rfloor$. Déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x f(x).$$