Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre de printemps 2022-2023**

L1 Math-Info — UE : Analyse 2

Corrigé du CC n° 1

MERCREDI 8 FÉVRIER 2023 - DURÉE : 45MIN

Question de cours.

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a, et $\ell \in \mathbf{R}$. On suppose $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$. Montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

On a $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, c'est à dire qu'il existe une fonction h définie au voisinage de a telle que $f(x) = g(x)\,h(x)$ avec $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$. Or $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)\,h(x) = \ell$.

Exercice 1.

Soit $x \in \mathbf{R}$, on pose, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_n \leq x < x_n + \dfrac{1}{10^n}$.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers x.
3. Calculer l'approximation décimale par défaut à 10^{-2} près de $\dfrac{27}{13}$.

1. Soit $n \in \mathbf{N}$, par définition de la partie entière, on a
$$\lfloor 10^n x\rfloor \leq 10^n x < \lfloor 10^n x\rfloor + 1$$
En divisant par $10^n > 0$, on obtient
$$x_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n} = x_n + \frac{1}{10^n}$$
d'où le résultat.

2. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a
$$0 \leq x - x_n \leq \frac{1}{10^n}$$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{10^n} = 0$. Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

3. Dans cette question, $x = \dfrac{27}{13}$. L'approximation de x par défaut à 10^{-2} est x_2. En effet, on a : $x_2 \leq x < x_2 + 10^{-2}$.
On utilise l'algorithme vu en cours pour calculer x_2 :
$$\begin{aligned}&27 = 2\times 13 + 1\\&10\times 1 = 0\times 13 + 10\\&10\times 10 = 7\times 13 + 9.\end{aligned}$$
Ainsi, l'approximation de $\dfrac{27}{13}$ par défaut à 10^{-2} est 2,07.

Exercice 2. Déterminer la limite éventuelle de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N}$ comme suit :

$$u_n = \frac{2^n + \sin n}{3^n + \sin n}$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, en factorisant au numérateur par 2^n et au dénominateur par 3^n, on obtient

$$u_n = \frac{2^n + \sin n}{3^n + \sin n} = \frac{2^n}{3^n}\frac{1+\frac{\sin n}{2^n}}{1+\frac{\sin n}{3^n}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1+\frac{\sin n}{2^n}}{1+\frac{\sin n}{3^n}}.$$

Or pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leq \left|\frac{\sin n}{3^n}\right| = \frac{|\sin n|}{3^n} \leq \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Comme $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$, et d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{3^n} = 0$.
De même, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{2^n} = 0$.
De plus, $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.
Finalement, par somme, quotient et produit de limites, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 + x + x^2 + x^3| \leq 4$.
2. En déduire que pour tout $x \in [-1, 1]$, $|1 - x^4| \leq 4|1 - x|$.

1. Pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $|x| \leq 1$, et l'inégalité triangulaire donne

$$|1 + x + x^2 + x^3| \leq |1| + |x| + |x|^2 + |x|^3 \leq 4.$$

2. Soit $x \in [-1, 1]$.

— Pour $x \neq 1$, la somme géométrique donne

$$\frac{|1 - x^4|}{|1 - x|} = |1 + x + x^2 + x^3|$$

D'après la question précédente et en multipliant par $|1 - x| > 0$, on obtient

$$|1 - x^4| \leq 4|1 - x|.$$

— Pour $x = 1$, on a $|1 - x^4| = |1 - x| = 0$, donc la formule est également vérifiée.

Exercice 4. Pour chacune des propositions suivantes, décider si elle est vraie ou fausse. Justifier.

1. $x^2 + 1 = \underset{x\to+\infty}{O}(x^2)$,
2. $x = \underset{x\to0}{o}(e^x)$,
3. $\ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$,
4. $\ln(1 + x) \underset{x\to0}{\sim} x$.

1. On a
$$x^2+1=x^2\underbrace{\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\text{Borné au voisinage de }+\infty}\right)}_{\text{Borné au voisinage de }+\infty}.$$
En effet, $1+\dfrac{1}{x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}1$ donc $1+\dfrac{1}{x^2}$ a une limite finie en 0 et est donc borné au voisinage de 0. On a donc bien $x^2+1=\underset{x\to+\infty}{O}(x^2)$
2. On a $x\xrightarrow[x\to 0]{}0$ et $e^x\xrightarrow[x\to 0]{}1$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x}=0$. On a donc bien $x=\underset{x\to 0}{o}(e^x)$.
3. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ d'après le théorème de comparaison (croissances comparées). Le résultat est donc vrai.
4. On a $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$ (résultat de cours : le quotient étudié est le taux d'accroissement de $x\mapsto\ln(1+x)$ en 0 et $x\mapsto\ln(1+x)$ est dérivable en 0, de dérivée 1), l'équivalence est donc vraie.

Exercice 5. Pour tout x réel non nul, on définit $f(x)=\lfloor x+\frac{2}{x}\rfloor$. Déterminer, si elle existe, la limite suivante :
$$\lim_{x\to 0}xf(x).$$
Soit $x\in\mathbf{R}^*$. Par définition de la partie entière, on a
$$x+\frac{2}{x}-1<f(x)\leq x+\frac{2}{x}<f(x)+1.$$
On considère tout d'abord $x>0$. En multipliant par x, on obtient
$$x^2+2-x<xf(x)\leq x^2+2$$
De plus, $\lim\limits_{x\to 0^+}x^2+2=\lim\limits_{x\to 0^+}x^2+2-x=2$ donc, d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0^+}xf(x)=2$.
De même, en multipliant pas $x<0$, on obtient
$$x^2+2-x>xf(x)\geq x^2+2$$
Le théorème des gendarmes donne alors $\lim\limits_{x\to 0^-}xf(x)=2$
Finalement, on a
$$\lim_{x\to 0}xf(x)=2.$$