TD 6. Ex.23

Rappel:

$f(b)=\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\cdot\frac{(b-a)^k}{k!}+$

$f^{(n+1)}(c)\,\frac{(b-a)^{k+1}}{(n+1)!}\quad c\in\,]a,b[$

1. Pour cos à l'ordre n entre 0 et x

$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\cos^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!}+\cos^{(k+1)}(c)\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Notons que:

$\cos^{(0)}(0)=\cos(0)=1$

$\cos^{(1)}(0)=-\sin 0=0$

$\cos^{(2)}(0)=-\cos 0=-1$

$\cos^{(3)}(0)=\sin 0=0$

$\cos^{(4)}(0)=1$

---

2. Calculons $\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)$ à 10^{-5} près.

Prenons $n=5$

On a:

$\left|\cos^{(n+1)}(c)\;\frac{\left(\frac{\pi}{32}\right)}{6!}\right|=\;\leq\frac{\pi^6}{32^6\cdot 720}$

$=\left|\underbrace{-\cos(c)}_{\leq 1}\right|\cdot\frac{-\pi^6}{32^6\,720}$

dérivé 6 fois

Donc $\cos\left(\frac{\pi}{32}\right)$ peut être approché à 10^{-5} près:

$\sum_{k=0}^{5}\cos^{(k)}(0)\;\frac{\left(\frac{\pi}{32}\right)^k}{k!}$

$=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{32}\right)^2+\frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{32}\right)^4$

TD3. Ex 8

1. Donner l'expression du terme général de la suite déf. par :

$\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=-1 \\ 2u_{n+2}=3u_{n+1}-u_n \end{cases}\quad (n\in\mathbb{N})$

$\iff 2u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n=0$

L'éq. caractéristique:

$2x^2-3x+1=0$

$\Delta=9-4\times 2=1>0$

Donc le terme gen. de la suite (u_n) est de la forme:

$u_n=\lambda r_1^{\,n}+\mu r_2^{\,n},\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

où r_1 et r_2 sont les deux racines réelles de $2x^2-3x+1$

$r_1=\frac{3+1}{2\times 2}=\frac{4}{4}=1$

$r_2=\frac{3-1}{2\times 2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

Donc: $u_n=\lambda 1^n+\mu\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\lambda+\mu\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

$*\ \underset{1}{u_0}=\lambda+\mu$

$*\ \underset{-1}{u_1}=\lambda+\frac{\mu}{2}\quad\begin{cases}1+\mu=1\\ 1+\frac{\mu}{2}=-1\end{cases}$

$\iff\begin{cases}\mu=1-\lambda\\ \lambda+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{2}=-1\end{cases}\iff\begin{cases}\mu=1-\lambda\\ \lambda=-3\end{cases}\ \begin{cases}\mu=2\\ \lambda=-3\end{cases}$

Ccl: $u_n=-3+4\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=-3+2^2\cdot 2^n$

$=-3+2^{2-n}\quad n\in\mathbb{N}$

2. Donner l'expression du terme général de la suite déf. par :

$\begin{cases} u_0=1 \\ u_1=0 \\ u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n,\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$

Eq. caractéristique.

$x^2-4x+4=0$

$\Delta=4^2-4\times 4=0$

Donc le terme gen. de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme:

$u_n=(\lambda+\mu n)r^n,\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$ où r est la racine double de

x^2-4x+4

$r=2$

Donc $u_n=(\lambda+\mu n)2^n,\ n\in\mathbb{N}$

$u_0=\lambda$

$0=u_1=2(\lambda+\mu)$

Donc $u_n=(1-n)2^n,\ n\in\mathbb{N}$

$=n-\frac{n^2}{2}+o(x^2)$

$\frac{2x^2-\cos x-x}{\ln(1+\sin(x)-x)}$

$=\frac{1+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}-1+\frac{x^2}{2}-\cancel{x}+o(x^2)}{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x}$

$=\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\frac{-x^2}{2}+o(x^2)}$

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+o(x^2)}{x^2}=1+\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x^2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}+\ln\frac{o(x)}{x^2}$

$=-\frac{1}{2}$

TD 5 EX.13 CCF 2022

1. Soit A une primitive de $x\to-\frac{1}{2(x+1)}$

la solution homogène à (E_0) est de la forme $y_h(x)=Ce^{-A(x)},\ n\in[0,\infty[$.

$A(x)=-\int\frac{1}{2(x+1)}=\frac{1}{2}\ln|(x+1)|$

$=\frac{1}{2}\ln(x+1)$

Donc $y_h(x)=C\cdot e^{\frac{1}{2}\ln(x+1)}$

$=C\cdot e^{\ln(\sqrt{x+1})}$

2. $\lambda(x)=\int_0^x\frac{t}{\sqrt{1+t}}\,dt$

① Exprimer t en fonct. de u $\quad u^2=1+t$

$t=u^2-1$

donc par (E) $c'(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}}$ donc $c(x)=\int_0^x\frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$

$=\lambda(x)=2\left[\frac{1}{3}(1+x)^{3/2}-\sqrt{1+x}+\frac{2}{3}\right]$

On a donc $y_p(x)=c(x)\sqrt{x+1}$

$=2\left[\frac{1}{3}(1+x)^2-(1+x)+\frac{2}{3}\sqrt{x+1}\right]$

Enfin la solution générale à (E) est de la forme $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$

$=C\sqrt{x+1}+2\left[\frac{1}{3}(1+x)^2-(1-x)+\frac{2}{3}\sqrt{1+x}\right]$

$x\in[0,\infty[\quad C\in\mathbb{R}$.